Lezioni di Meccanica Analitica
per astronomia

Lezioni di Meccanica Analitica

per astronomia

Renato Troilo

Dario Tiveron

Lulu

pubblicato da
LULU ENTERPRISES, INC.

Seconda edizione: Settembre 2o11

In copertina: schema del riferimento terrestre.

Cronologia delle edizioni e delle revisioni
www.astronomyproject.com

web: www.astronomyproject.com
e-mail: info@astronomyproject.com

Indice

Capitolo 1

Cinematica

1.1 Moto di un sistema

Si ha un fenomeno di moto quando:

1. un corpo (o oggetto fisico)
2. cambia posizione
3. nel tempo
4. rispetto ad un riferimento spaziale (osservatore).

In Meccanica Classica si ammette che lo spazio delle nostre sensazioni sia tridimensionale-euclideo e quindi, introdotta una terna $T(0, x_1, x_2, x_3)$ — qui e nel seguito, tranne avviso contrario, trirettangola e levogira — la *forma metrica* è:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \,.$$

In questo testo considereremo tre modelli fondamentali di corpi, o oggetti: il punto (o particella), il sistema particellare (formato da un numero finito di punti) ed il sistema continuo, ovvero un sistema che occupa un'intera regione (mono-bi-tridimensionale) dello spazio.

Posizione di un corpo è l'insieme delle coordinate dei suoi punti rispetto a T_0, mentre il *tempo* è definito come un insieme $\{\theta\}$ di ∞^1 istanti — dove *istante* è un concetto primitivo proprio come il punto. Si ammette che $\{\theta\}$ sia suscettibile di un ordinamento stretto tale che per ogni coppia di istanti $\theta_1 \neq \theta_2$ sia noto se vale una delle seguenti:

$$\begin{aligned} \theta_1 < \theta_2 \,, &\qquad \text{se } \theta_1 \text{ è prima di } \theta_2 \\ \theta_2 < \theta_1 \,, &\qquad \text{se } \theta_2 \text{ è prima di } \theta_1 \,. \end{aligned}$$

Si dice *ascissa temporale ammissibile* una biezione $t(\theta)$ di $\{\theta\}$ su $\mathbb{R}$ tale che per ogni coppia di istanti $\theta_1 \neq \theta_2$ sia

$$t(\theta_1) < t(\theta_2) \iff \theta_1 < \theta_2 \,.$$

Con riferimento alla terna $T(0, x_1, x_2, x_3)$ — di versori fondamentali $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3}$ — e ad una fissata ascissa temporale ammissibile, si dice *moto del punto* (o della particella) P la funzione vettoriale

$$OP(t) = x_1(t)\,\mathbf{c_1} + x_2(t)\,\mathbf{c_2} + x_3(t)\,\mathbf{c_3} \tag{1.1}$$

che rappresenta la posizione di P in ogni istante t appartenente ad un intervallo I, dove I si dice intervallo del moto. Si supporrà inoltre $OP \in C_I^k$, con $K \geq 2$.

Si definisce **moto di un sistema** ε (particellare o continuo) l'insieme delle funzioni

$$\{OP_\nu(t)\} \tag{1.2}$$

con $\nu \in D$, insieme di indici.
Se D è *finito*, $D = \{1, 2, \ldots, n\}$ indica un sistema particellare; se invece D è una *varietà* (mono-bi-tridimensionale) la 1.2 fornisce il moto di un sistema continuo.
Ammetteremo, in questo caso, che

$$OP_\nu \neq OP_{\nu'} \qquad \forall \nu \neq \nu' \in D \qquad \forall t \in I \,.$$

Con riferimento ora alla particella, la *velocità* è espressa dalla relazione

$$\mathbf{v} = \frac{dOP}{dt} = \dot{x}_1\,\mathbf{c_1} + \dot{x}_2\,\mathbf{c_2} + \dot{x}_3\,\mathbf{c_3}\,,$$

mentre l'*accelerazione* è

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2OP}{dt^2} = \ddot{x}_1\,\mathbf{c_1} + \ddot{x}_2\,\mathbf{c_2} + \ddot{x}_3\,\mathbf{c_3}\,.$$

La curva di equazione vettoriale (o meglio il suo supporto)

$$OP = \sum_1^3 x_i(t)\,\mathbf{c_i}$$

si dice *traiettoria* della particella e il differenziale

$$dP = dOP = \mathbf{v}dt \tag{1.3}$$

si dice *spostamento elementare.*

Supposte le condizioni per uno sviluppo in formula (o in serie) di Taylor, lo *spostamento effettivo* può scriversi

$$\Delta P = OP(t+dt) - OP(t) = \frac{dOP}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2OP}{dt^2}dt^2 + \dots$$

e quindi

$$\Delta P = \mathbf{v}dt + \mathbf{a}\frac{dt^2}{2} + \dots \quad .$$

Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$,

$$\Delta P = dP \tag{1.4}$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore a dt. Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si può porre

$$\Delta P = \mathbf{a}\frac{dt^2}{2} \tag{1.5}$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore a dt^2.

1.2 Moti rigidi

Sia C un sistema particellare o continuo, $T(0, x_1, x_2, x_3)$ una terna di riferimento e t — d'ora in poi — un'ascissa temporale ammissibile.
Si dice che C si muove di *moto rigido* nell'intervallo temporale I se, comunque si prenda una coppia di punti $P_\nu, P_{\nu'} \in C$, risulta

$$\frac{d|P_\nu P_{\nu'}|}{dt} = 0\,, \qquad \forall t \in I\,.$$

Un sistema si dice *rigido* se ogni suo possibile moto è rigido e, d'ora in poi, per brevità, ci riferiremo sempre a corpi rigidi.

Si considerino due punti P_1 e P_2 in moto rispetto a T. Poiché $P_1P_2 = OP_2 - OP_1$, si ha

$$\frac{dP_1P_2}{dt} = \frac{dOP_2}{dt} - \frac{dOP_1}{dt} = \mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}\,. \tag{1.6}$$

Ci proponiamo di descrivere il moto di un corpo rigido C.
Sia T la terna di riferimento e $T'(\Omega, y_1, y_2, y_3)$ — di versori fondamentali $\mathbf{j_1}, \mathbf{j_2}, \mathbf{j_3}$ — una terna soslidale a C, ovvero una terna rispetto alla quale

ogni punto di C ha coordinate indipendenti dal tempo.
Se P è un generico punto $\in C$ di coordinate (y_1, y_2, y_3) rispetto alla terna T', dalla

$$OP = O\Omega + \Omega P$$

segue

$$OP = O\Omega + \sum_1^3 y_i \, \mathbf{j_i} \, .$$

Derivando:

$$\mathbf{v_p} = \mathbf{v_\Omega} + \sum_1^3 y_i \frac{d\mathbf{j_i}}{dt} \, . \tag{1.7}$$

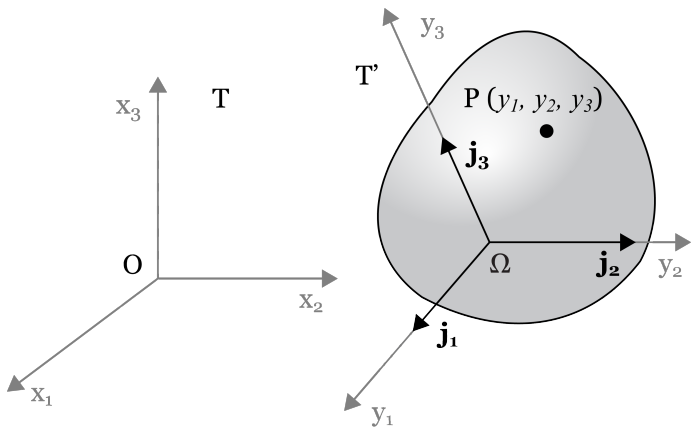


Figura 1.1: *Terne di assi T e T'.*

Sarebbe possibile dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1.1 *Dato un corpo rigido C in moto (rispetto a T) esiste un vettore $\vec{\omega}$, dipendente solo dal moto*[1]*, tale che risulti*

$$\frac{d\mathbf{j_i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{j_i} \, , \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.8}$$

e tale vettore — che si dice ***velocità angolare*** *di C — è*

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_1^3 \mathbf{j_k} \wedge \frac{d\mathbf{j_k}}{dt} \, . \tag{1.9}$$

[1] Ciò significa che $\vec{\omega}$ è indipendente dalla scelta della terna solidale $T'(0, \mathbf{j_1}, \mathbf{j_2}, \mathbf{j_3})$.

Si omette la dimostrazione.

Le formule 1.8 si dicono *formule di Poisson.*

Da 1.7 segue allora

$$\mathbf{v_p} = \mathbf{v_\Omega} + \sum_1^3 y_i\, \vec{\omega} \wedge \Omega P = \mathbf{v_\Omega} + \vec{\omega} \wedge + \sum_1^3 y_i\, \mathbf{j_i}$$

e quindi

$$\mathbf{v_p} = \mathbf{v_\Omega} + \vec{\omega} \wedge \Omega P\,. \tag{1.10}$$

Questa è la **formula fondamentale della cinematica dei moti rigidi**. E' infatti evidente il rilievo della determinazione del vettore $\vec{\omega}$: dati $\vec{\omega}$ e la velocità di un punto $\Omega \in C$ (arbitrario), la 1.10 fornisce la velocità di ogni $P \in C$.

Consideriamo ora un vettore $\mathbf{u}(t)$ dipendente da t. In riferimento a T' esso può esprimersi sia come

$$\mathbf{u}(t) = \sum_1^3 u_i(t)\, \mathbf{j_i} \tag{1.11}$$

sia, con riferimento a T, come

$$\mathbf{u}(t) = \sum_1^3 U_i(t)\, \mathbf{c_i}\,.$$

Si derivi la 1.11:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \sum_1^3 \dot{u}_i\, \mathbf{j_i} + \sum_1^3 u_i \frac{d\mathbf{j_i}}{dt}\,, \tag{1.12}$$

dove, d'ora in poi, si indicherà $\dot{\mathbf{u}} = \sum_1^3 \dot{u}_i\, \mathbf{j_i}$.
Da 1.12 e dalle formule di Poisson segue dunque

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} + \vec{\omega} \wedge \mathbf{u}\,. \tag{1.13}$$

Si osservi che $\dot{\mathbf{u}}$ è la derivata di $\mathbf{u}$ che mantiene le $\mathbf{j_i}$ costanti (in sostanza è la variazione di $\mathbf{u}$ rispetto ad un osservatore su T'), così la 1.13 si può scrivere

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{spazio} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{corpo} + \vec{\omega} \wedge \mathbf{u}\,.$$

Si osservi anche la particolarità del vettore $\vec{\omega}$: se

$$\mathbf{e} = \frac{\vec{\omega}}{|\omega|}\,,$$

da 1.13 segue

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \dot{\mathbf{e}}\,. \tag{1.14}$$

Ne risulta — in particolare — che se la direzione di $\vec{\omega}$ è costante nello spazio, è costante rispetto al corpo (cioè rispetto a T'), e viceversa.

1.3 Accelerazioni nel moto rigido

Dalla formula fondamentale 1.10 segue (per derivazione)

$$\mathbf{a_p} = \mathbf{a_\Omega} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \Omega P + \vec{\omega} \wedge \frac{d\Omega P}{dt}$$

e, ricordando 1.6 e 1.10, si ha

$$\mathbf{a_p} = \mathbf{a_\Omega} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \Omega P + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \Omega P)\,. \tag{1.15}$$

L'ultimo termine al secondo membro è un prodotto del tipo $\mathbf{v_1} \wedge (\mathbf{v_2} \wedge \mathbf{v_3})$ che si dice *doppio prodotto vettore* e vale la formula, facilmente verificabile,

$$\mathbf{v_1} \wedge (\mathbf{v_2} \wedge \mathbf{v_3}) = (\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_3})\mathbf{v_2} + (\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2})\mathbf{v_3}\,. \tag{1.16}$$

La retta a passante per Ω e parallela a $\vec{\omega}$ si dice *asse istantaneo di rotazione* del moto rigido di C.

Indicata con Q la proiezione ortogonale di P su a, e poiché

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \Omega P) = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (\Omega Q + QP)\,,$$

da 1.16 segue

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \Omega P) = -\omega^2 QP\,.$$

In definitiva, per l'accelerazione di un P generico da 1.15 si ha

$$\mathbf{a_p} = \mathbf{a_\Omega} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \Omega P - \omega^2 QP\,. \tag{1.17}$$

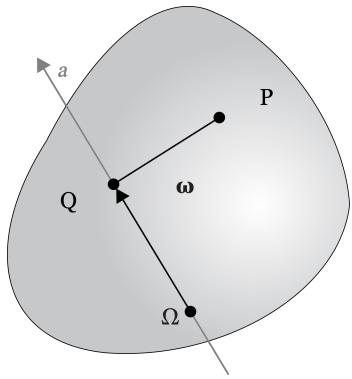


Figura 1.2: *Accelerazioni nel moto rigido.*

1.4 Moti rigidi particolari

Se durante il moto di C risulta $\vec{\omega} = 0 \, \forall t \in I$, si dice che il moto è *traslatorio*. In tal caso, da 1.10 e 1.17 segue

$$\mathbf{v_p} = \mathbf{v_\Omega} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{a_p} = \mathbf{a_\Omega} \, , \tag{1.18}$$

quindi le velocità e le accelerazioni di tutti i punti sono uguali in ogni istante di un moto traslatorio. Se $\vec{\omega} = \mathbf{0}$, da 1.9 segue

$$\frac{d\mathbf{j_k}}{dt} = \mathbf{0} \qquad \text{con } k = 1, 2, 3$$

e cioè T' ha assi con direzione invariabile rispetto a T. Lo stesso vale per ogni altra terna solidale a C.

Si dice che un moto traslatorio è *uniforme* se

$$\mathbf{v_p} = \text{cost}, \, \mathbf{a_p} = \mathbf{0} \qquad \forall t \in I \, . \tag{1.19}$$

Se durante il moto di C, posto $\mathbf{e} = \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|}$, risulta

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{0} \qquad \forall t \in I \, ,$$

il moto si dice *rototraslatorio*. Ciò equivale a dire che la direzione di $\vec{\omega}$ è costante nello spazio e quindi (vedi 1.14) è costante anche nel corpo.

Il moto di C si dice *con punto fisso* se esiste un $\Omega \in C$ tale che

$$\mathbf{v_\Omega} = \frac{dO\Omega}{dt} = \mathbf{0} \qquad \forall t \in I\,,$$

e, dalla formula fondamentale 1.10, segue

$$\mathbf{v_p} = \vec{\omega} \wedge \Omega P\,. \tag{1.20}$$

Un moto di C con asse fisso — tale cioé che esista una retta a solidale tale che $\forall A \in a$, $\mathbf{v_a} = \mathbf{0}$ per $t \in I$ — si dice *moto rotatorio*. Un moto rotatorio è un caso particolare di moto rototraslatorio e infatti, se $P_1, P_2 \in a$,

$$\frac{dP_1P_2}{dt} = \vec{\omega} \wedge P_1P_2 = \mathbf{0}$$

e, se $\mathbf{e} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$, segue quindi $\mathbf{e} \parallel a$ e dunque $\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{0}$.
La retta a si dice *asse di rotazione fissa* nello spazio (e nel corpo).

Un moto rotatorio si dice *uniforme* se $\vec{\omega} = \text{cost}$ per $t \in I$.
Si osservi che in un moto rotatorio (uniforme) segue[2]

$$\mathbf{a_p} = -\omega^2\, QP\,, \tag{1.21}$$

che si suol dire *accelerazione centripeta*.

Si consideri il moto rotatorio rappresentato in Figura 1.4: l'asse di rotazione è fisso nello spazio — e nel corpo — e può quindi farsi coincidere con gli assi $x_3 = y_3$ delle due terne T (fissa) e T' (solidale). Se ϕ è l'angolo $\widehat{\mathbf{c_1}O\mathbf{j_1}}$ è facile provare che

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}_{\mathbf{j_3}} = \dot{\phi}_{\mathbf{c_3}}\,. \tag{1.22}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{j_1} &= \cos\phi\,\mathbf{c_1} + \sin\phi\,\mathbf{c_2} \\ \mathbf{j_2} &= -\sin\phi\,\mathbf{c_1} + \cos\phi\,\mathbf{c_2}\,, \end{aligned}$$

[2] Da 1.17.

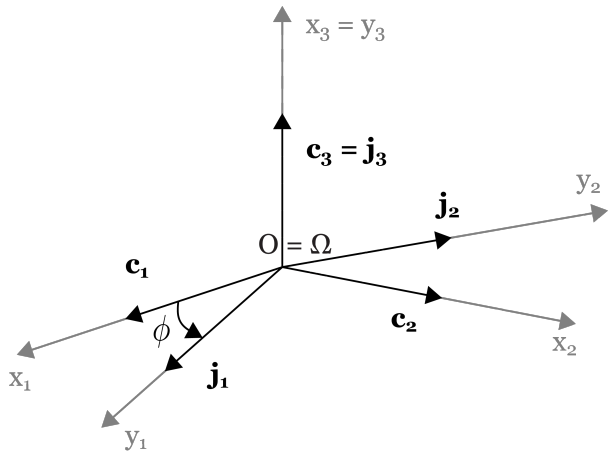


Figura 1.3: *Analisi del moto rotatorio.*

ne segue

$$\frac{d\mathbf{j_1}}{dt} = \dot{\phi}\,\mathbf{j_2} \qquad \text{e} \qquad \frac{d\mathbf{j_2}}{dt} = -\dot{\phi}\,\mathbf{j_1}\,. \tag{1.23}$$

Ricordando che $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\sum_1^3 \mathbf{j_i} \wedge \frac{d\mathbf{j_i}}{dt}$ (vedi 1.9),

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{j_1} \wedge \frac{d\mathbf{j_1}}{dt} + \mathbf{j_2} \wedge \frac{d\mathbf{j_2}}{dt} + \mathbf{0}\right]$$

e, da 1.23,

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\dot{\phi}\,\mathbf{j_3} + \dot{\phi}\,\mathbf{j_3}\right] = \dot{\phi}\,\mathbf{j_3} = \dot{\phi}\,\mathbf{c_3}\,.$$

1.4.1 Moti piani

Per semplicità, si consideri il moto di una lamina (piana) rigida su di un piano Π fisso nello spazio. Si vuole dimostrare che un tale moto è rototraslatorio e che, $\forall t \in I$ (intervallo del moto), la velocità angolare $\vec{\omega}$ è ortogonale a Π (oppure è nulla).
Infatti se Ω e P sono due punti qualsiasi della lamina, la formula fondamentale fornisce

$$\mathbf{v_p} - \mathbf{v_\Omega} = \vec{\omega} \wedge \Omega P\,.$$

Poiché Ω e P si muovono su Π, le loro velocità $\mathbf{v_\Omega}$ e $\mathbf{v_p}$ sono parallele a Π. Se quindi $\mathbf{n}$ individua il versore perpendicolare a Π, segue che

$$(\mathbf{v_p} - \mathbf{v_\Omega}) \times \mathbf{n} = (\vec{\omega} \wedge \Omega P) \times \mathbf{n} = 0\,.$$

Poiché ΩP è un vettore qualsiasi parallelo a Π (Ω e P sono arbitrari), segue necessariamente il parallelismo tra $\vec{\omega}$ e $\mathbf{n}$, ovvero, posto $\mathbf{e} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$, si ha

$$\mathbf{e} = \pm \mathbf{n}\,.$$

In definitiva $\mathbf{e}$ ha direzione invariabile nello spazio e il moto — per definizione — è rototraslatorio.

Osservazione
Dalla formula fondamentale 1.10, moltiplicando per dt, segue

$$\mathbf{v_p} dt = \mathbf{v_\Omega} dt + \vec{\omega} dt \wedge \Omega P\,,$$

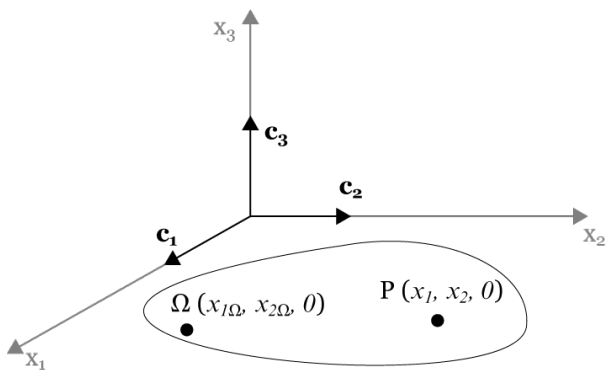
per cui, ricordando la definizione 1.3 di spostamento elementare, segue che per ogni moto rigido

$$dP = d\Omega + \vec{\omega} dt \wedge \Omega P$$

esprime lo *spostamento elementare* di ogni punto $P \in C$.

1.5 Esercizio

Si consideri un moto piano costituito da una *lamina rigida* che si muova sul piano $(0, x_1, x_2)$.



Assegnate $O\Omega = 2t\mathbf{c_1} + 3\mathbf{c_3}$ e $\omega = 2t\mathbf{c_3}$, si trovi la velocità del generico punto $P(x_1, x_2, 0)$ della lamina. Partiamo dalla velocità del punto:

$$\mathbf{v_p} = \dot{x}_1 \mathbf{c_1} + \dot{x}_2 \mathbf{c_2} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v_\Omega} = \frac{dOP}{dt} = 2\mathbf{c_1}\,.$$

Si ha dunque

$$\mathbf{v_p} = \mathbf{v_\Omega} + \vec{\omega} \wedge \Omega P \,, \tag{1.24}$$

dove

$$\Omega P = (x_1 - x_{1\Omega})\mathbf{c_1} + (x_2 - x_{2\Omega})\mathbf{c_2} = (x_1 - 2t)\mathbf{c_1} + (x_2 - 3)\mathbf{c_2} \,.$$

La 1.24 diviene quindi

$$\dot{x}_1\mathbf{c_1} + \dot{x}_2\mathbf{c_2} = 2\mathbf{c_1} + \begin{bmatrix} \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & \mathbf{c_3} \\ 0 & 0 & 2t \\ x_1 - 2t & x_2 - 3 & 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{c_1} - 2t(x_2 - 3)\mathbf{c_1} + 2t(x_1 - 2t)\mathbf{c_2} \,. \tag{1.25}$$

1.6 Angoli di Eulero. Precessioni

La posizione di un corpo rigido C — in cui si consideri fissata una terna solidale $T'(\Omega, y_1, y_2, y_3)$ di versori $\mathbf{j_1}, \mathbf{j_2}, \mathbf{j_3}$ — è nota, rispetto a una terna assegnata T, quando siano noti $(x_{1\Omega}, x_{2\Omega}, x_{3\Omega},)$ e le direzioni $\mathbf{j_i}$ delle y_i.

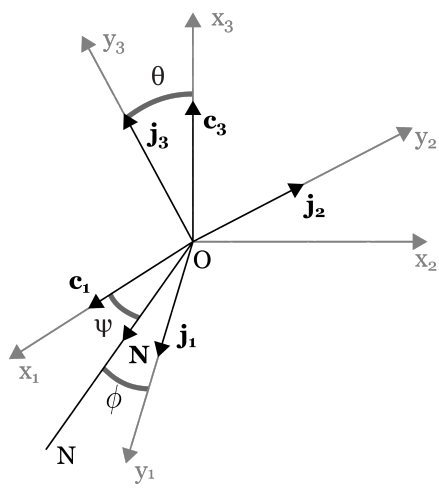


Figura 1.4: *Angoli di Eulero e precessioni.*

Spesso si usano gli angoli di Eulero in cui, riportate le due terne alla stessa origine O, N rappresenta la linea dei nodi ed è l'intersezione dei piani (O, x_1, x_2) e (O, y_1, y_2). Detto

$$\theta = \widehat{\mathbf{c_3} O \mathbf{j_3}} \,, \qquad 0 \le \theta \le \pi \,,$$

N è orientata in modo che (x_3, j_3, N) sia levogira.
Posto

$$\psi = \widehat{\mathbf{c_1} O \mathbf{N}}\,, \qquad 0 \le \psi \le 2\pi$$

e

$$\phi = \widehat{\mathbf{N} O \mathbf{j_1}}\,, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

θ si dice *angolo di nutazione*, ψ si dice *angolo di precessione* e ϕ *angolo di rotazione propria*: i tre angoli determinano univocamente la posizione di T' rispetto a T.

Sussiste la seguente formula:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\mathbf{c_3} + \dot{\theta}\,\mathbf{N} + \dot{\phi}\,\mathbf{j_3} \tag{1.26}$$

(di cui verrà data a lezione una giustificazione intuitiva). Da essa si possono ricavare le componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla terna T':

$$\begin{cases} p_1 = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\phi\cos\theta \\ p_2 = -\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\cos\phi\sin\theta \\ p_3 = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \tag{1.27}$$

oppure le componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla terna fissa T:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\psi\cos\theta \\ \omega_2 = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\phi}\cos\psi\sin\theta \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{cases} \tag{1.28}$$

Si omette la dimostrazione di queste formule ma si osservi, ad esempio, che la terza equazione delle 1.27 segue immediatamente moltiplicando scalarmente, in 1.26, per $\mathbf{j_3}$.

Un moto rigido con punto fisso ($\mathbf{v}_\omega = \mathbf{o}$) si dice **precessione** se esiste una retta fissa p ed una retta solidale ρ passanti per O tali che — durante il moto — l'angolo θ da esse formato sia costante.

Siano $\mathbf{c}$ e $\mathbf{k}$ i versori di p e ρ:

$$\frac{d}{dt}(\cos\theta) = \frac{d}{dt}\mathbf{c} \times \mathbf{k} = \mathbf{c} \wedge \frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

e, poiché $\mathbf{k}$ è un versore solidale, dalle formule di Poisson segue

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{k}\,.$$

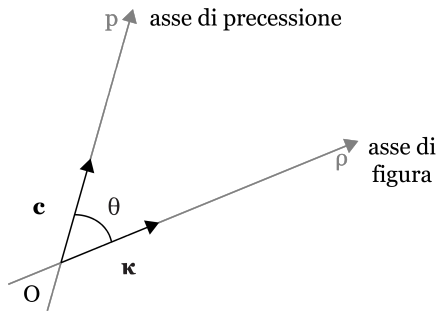


Figura 1.5: *Precessione.*

In definitiva

$$\frac{d}{dt}(\cos\theta) = \mathbf{c} \times \vec{\omega} \wedge \mathbf{k}$$

pertanto i vettori $\mathbf{c}$, $\vec{\omega}$ e $\mathbf{k}$ sono complanari se e solo $\theta = \text{cost}$. Ne viene che è caratteristica dei moti di precessione la seguente espressione di $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \partial(t)\mathbf{c} + \mu(t)\mathbf{k}\,, \tag{1.29}$$

dove $\partial(t)$ si dice *velocità di precessione* e $\mu(t)$ *velocità di rotazione propria.* Quando esse sono costanti, la precessione si dice *regolare.*

Osservazione

Ricordando l'espressione 1.26 della velocità angolare $\vec{\omega}$, e supponendo di assumere x_3 come asse di precessione e y_3 come asse di figura, dall'essere $\dot{\theta} = 0$ segue

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\mathbf{c_3} + \dot{\phi}\,\mathbf{j_3}\,.$$

$\dot{\psi}$ è quindi la velocità di precessione e $\dot{\phi}$ quella di rotazione propria. Questo è il motivo per cui gli angoli di Eulero ψ e ϕ si dicono, rispettivamente, angolo di precessione e angolo di rotazione propria.

Esercizio

Si trovi $\vec{\omega}$ nella nota precessione degli equinozi.

Capitolo 2

Dinamica

2.1 Il problema dei moti relativi

Dati due riferimenti $T(0, x_1, x_2, x_3)$ e $T'(0, x'_1, x'_2, x'_3)$ supporremo convenzionalmente che la terna T' sia mobile rispetto alla terna T, da ritenersi fissa. Ciò significa che data una ascissa temporale (ammissibile) t, la terna T' si muove di moto rigido rispetto a T, moto assegnato da

$$\begin{cases} O\Omega = O\Omega(t) \\ \mathbf{j_i} = \mathbf{j_i}(t)\,, \end{cases} \qquad t \in I$$

dove le $\mathbf{j_i}$ rappresentano i versori fondamentali di T'.
Indicheremo convenzionalmente T come terna fissa (o assoluta) e T' come terna mobile (o relativa).

Quando una particella P è in moto rispetto sia a T che a T', il moto assoluto è rappresentato da

$$OP = \sum_1^3 x_i(t)\,\mathbf{c_i} \qquad t \in I \tag{2.1}$$

e, fissata un'ascissa temporale ammissibile t' rispetto a cui coordinare il moto di P rispetto a T', il moto relativo è fornito da

$$\Omega P = \sum_1^3 y_i(t')\,\mathbf{j_i} \qquad t' \in I'\,. \tag{2.2}$$

Il problema della cinematica relativa è quello di trovare le relazioni intercorrenti tra i moti descritti da 2.1 e 2.2 e le associate grandezze cinematiche principali (velocità e accelerazione) valutate nei due riferimenti.
In altri termini ci proponiamo di trovare le relazioni intercorrenti tra i rilevamenti cinematici che due eventuali sperimentatori, posti uno in T ed uno in T', potrebbero osservare studiando il moto di una stessa particella P.
Risolveremo facilmente il problema ipotizzando che sia possibile assumere la stessa ascissa temporale nei due riferimenti, cioè che $t = t'$ e che la 2.2 possa essere riscritta come

$$\Omega P = \sum_{1}^{3} y_i(t)\,\mathbf{j_i} \qquad t \in I\,. \tag{2.3}$$

Ciò equivale ad affermare che eventi simultanei per un osservare in T lo saranno anche per un osservatore in T'. Questa assunzione ci condurrà alle importanti formule del prossimo paragrafo.

Ora, se tali formule — come faremo — si riportano in Dinamica, è bene rendersi conto che l'assunto da cui derivano non è una semplice ipotesi matematica, bensì diviene una vera e propria assunzione fisica (riguardante, ad esempio, il comportamento di orologi in moto relativo). E' bene cioè rendersi conto che, se vogliamo trasportare quanto si stabilirà tra poco in una teoria fisica, sarà necessario assumere quanto appena affermato sulla "simultaneità"come **postulato fondamentale della cinematica classica**.
Esso, come è noto, è negato in Relatività.

2.2 Formule della cinematica relativa. Teorema di Coriolis

Diremo convenzionalmente:

moto assoluto: il moto della particella P rispetto alla terna T (assoluta);

moto relativo: il moto della particella P rispetto alla terna T' (relativa);

moto di trascinamento: il moto di quel punto dello spazio solidale a T' che è sovrapposto alla particella nell'istante t generico.

Indicheremo con:

$\mathbf{v_a}$ la velocità di P rispetto a T (velocità assoluta);

$\mathbf{v_r}$ la velocità di P rispetto a T' (velocità relativa);

$\mathbf{v}_\tau$ la velocità di trascinamento.

Dalla formula fondamentale dei moti rigidi segue che

$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v_\Omega} + \vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{\Omega P}\,, \tag{2.4}$$

dove $\vec{\omega}_\tau$ rappresenta la velocità angolare di T'.

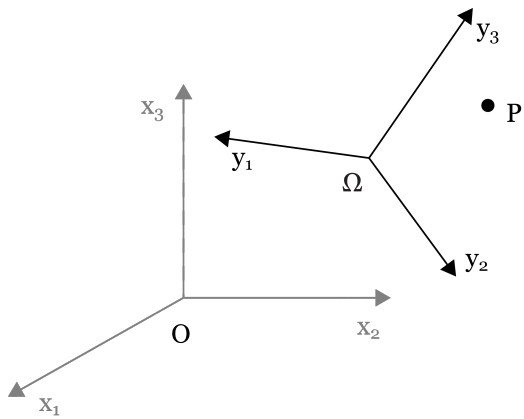


Figura 2.1: *Terna T e terna T'.*

Dalla relazione vettoriale [1]

$$OP = O\Omega + y_i\,\mathbf{j_i}\,, \tag{2.5}$$

e derivando rispetto al tempo, segue

$$\frac{dOP}{dt} = \mathbf{v_a} = \mathbf{v_\Omega} + \dot{y}_i\,\mathbf{j_i} + y_i\frac{d\mathbf{j_i}}{dt}$$

che, ricordando le formule di Poisson, diventa

$$\mathbf{v_a} = \dot{y}_i\,\mathbf{j_i} + (\mathbf{v_\Omega} + \vec{\omega}_\tau \wedge y_i\,\mathbf{j_i})\,. \tag{2.6}$$

Posto quindi $\mathbf{v_r} = \dot{y}_i\,\mathbf{j_i}$ (velocità relativa), da 2.4 si ha

$$\mathbf{v_a} = \mathbf{v_r} + \mathbf{v}_\tau\,. \tag{2.7}$$

[1] Si omette, per brevità di scrittura, il simbolo di sommatoria $\sum_1^3 y_i\mathbf{j_i} = y_i\mathbf{j_i}$

Infine, derivando la 2.6, segue facilmente

$$\mathbf{a_a} = \mathbf{a_r} + \mathbf{a}_\tau + 2\,\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v_r}\,. \tag{2.8}$$

Quest'ultima equazione esprime l'importante **teorema di Coriolis**: l'accelerazione assoluta risulta somma dell'accelerazione relativa, dell'accelerazione di trascinamento e del termine $\mathbf{a_c} = 2\,\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v_r}$ che si dice, appunto, *accelerazione di Coriolis*.

Infatti, per derivazione da 2.6[2] si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a_a} &= \ddot{y}_i \mathbf{j_i} + \dot{y}_i \frac{d\mathbf{j_i}}{dt} + \mathbf{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}}_\tau \wedge \Omega P + \dot{y}_i(\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{j_i}) + \vec{\omega}_\tau \wedge y_i \frac{d\mathbf{j_i}}{dt} \\
\mathbf{a_a} &= \mathbf{a_r} + \left[\mathbf{a_\Omega} + \dot{\vec{\omega}}_\tau \wedge \Omega P + \vec{\omega}_\tau \wedge (\vec{\omega}_\tau \wedge \Omega P)\right] + \dot{y}_i \omega_\tau \wedge \mathbf{j_i} + \dot{y}\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{j_i}\,.
\end{aligned}$$

Ne viene quindi

$$\mathbf{a_a} = \mathbf{a_r} + \left[\mathbf{a_\Omega} + \dot{\vec{\omega}}_\tau \wedge \Omega P + \vec{\omega}_\tau \wedge (\vec{\omega}_\tau \wedge \Omega P)\right] + 2\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}_\tau\,,$$

dove il termine in parentesi quadra è l'*accelerazione di trascinamento* del punto P. Quindi, in definitiva, la formula di Coriolis è

$$\mathbf{a_a} = \mathbf{a_r} + \mathbf{a}_\tau + 2\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}_\tau\,.$$

2.3 Casi particolari

Primo caso

L'accelerazione di Coriolis è non nulla solo se $\vec{\omega}_\tau \neq \vec{0}$ (e ovviamente $\mathbf{v_r} \neq \vec{0}$). Ne viene che se il moto è *traslatorio* si ha $\mathbf{a_a} = \mathbf{a_r} + \mathbf{a_\Omega}$.

E' molto rilevante il caso del moto *traslatorio uniforme* ($\mathbf{a_a} = \mathbf{a_r}$) poiché se (e solo se) il moto di T' è di questo tipo, allora l'accelerazione coincide nei due riferimenti T e T' in ogni caso.

Secondo caso

Supponiamo che il moto di T' sia *rotatorio e uniforme*, dunque

$$\mathbf{a_a} = \mathbf{a_r} + \vec{\omega}_\tau \wedge (\vec{\omega}_\tau \wedge \Omega P) + \mathbf{a_c} \tag{2.9}$$

per cui, con Q proiezione ortogonale di P sull'asse di rotazione, si ha

$$\mathbf{a_a} = \mathbf{a_r} - \vec{\omega}^2 QP + \mathbf{a_c}\,. \tag{2.10}$$

[2] Si ricordino le formule di Poisson.

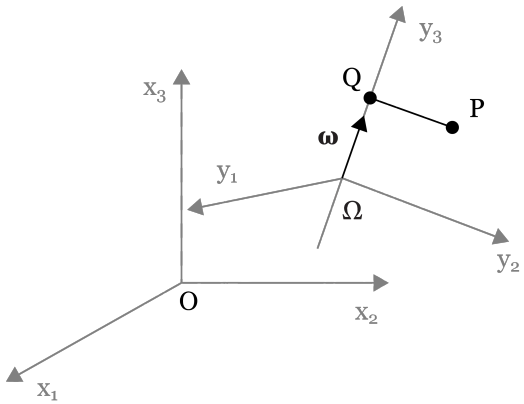


Figura 2.2: *Moto rotatorio e uniforme.*

Terzo caso

Dato un corpo rigido C in moto rispetto a T e T', detta $\vec{\omega}_a$ la velocità angolare di C rispetto a T e $\vec{\omega}_r$ la velocità angolare di C rispetto a T', si potrebbe dimostrare che

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_\tau \,. \tag{2.11}$$

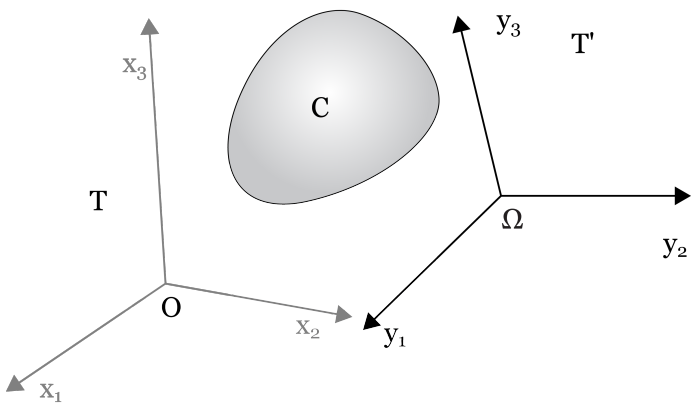


Figura 2.3: *Terzo caso.*

2.4 Dinamica relativa

Sono concepibili corpi rigidi e, in natura, sono riscontrabili corpi *approssimativamente* rigidi. Uno spazio Σ solidale ad un corpo rigido si dice spazio cinematico. Una qualsiasi terna $T_\Sigma(0, x_1, x_2, x_3)$ solidale a Σ si dice riferimento in Σ.

Si dice che lo spazio cinematico Σ è *inerziale* — e un qualsiasi riferimento T_Σ si dice *riferimento inerziale* — se ogni particella isolata[3] ha in T_Σ traiettoria rettilinea.

Si dice che una ascissa temporale ammissibile è *naturale* se una qualsiasi particella isolata riferita ad uno spazio inerziale Σ ha

$$\mathbf{v} = cost \qquad (\mathbf{a} = \mathbf{0})\,.$$

Ciò significa che la particella isolata si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a Σ.

Il **primo principio** della dinamica postula che:

- esistono spazi inerziali;
- esistono ascisse temporali naturali[4]

E' facile provare che se Σ è inerziale, lo è anche ogni spazio cinematico Σ' che trasla uniformemente rispetto a Σ. Infatti, data una particella qualsiasi, e detta $\mathbf{a}$ l'accelerazione in Σ (T_Σ) e $\mathbf{a}'$ quella in Σ' ($T_{\Sigma'}$), è noto dal teorema di Coriolis che

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_\tau + 2\,\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}'\,, \tag{2.12}$$

essendo $\mathbf{v}'$ la velocità (relativa) rispetto a $T_{\Sigma'}$ e $\mathbf{a}_\tau$, $\vec{\omega}_\tau$ rispettivamente l'accelerazione di trascinamento e la velocità angolare di trascinamento (cioè la velocità angolare di $T_{\Sigma'}$).
Per ipotesi, $\mathbf{a}_\tau = \mathbf{0}$ e $\vec{\omega}_\tau = \mathbf{0}$ (moto traslatorio uniforme). Se quindi la particella è isolata, per la definizione stessa di spazio inerziale, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e da 2.11 segue

$$\mathbf{a}' = \mathbf{0}$$

per ogni particella isolata. Ciò significa dunque che Σ' è inerziale.

Si potrebbe inoltre provare il viceversa e stabilire quindi il seguente teorema:

[3] *Isolata* significa "lontanissima" da ogni corpo che possa interagire dinamicamente; ipotizziamo allora di poter considerare particelle isolate con posizioni e velocità arbitrarie (principio zero della dinamica classica!).

[4] D'ora in poi ci riferiremo sempre e solo ad ascisse temporali naturali.

Teorema 2.1 *Tutti e soli gli spazi inerziali sono quelli che traslano uniformemente rispetto ad uno spazio inerziale Σ (che certamente esiste per il I° principio delle dinamica classica).*

E' ben noto che in uno spazio inerziale Σ, e in un qualsiasi riferimento T_Σ, per una qualsiasi particella P vale

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}\,, \tag{2.13}$$

in cui $\mathbf{F}$ rappresenta la forza *assoluta*, ovvero quella esercitata sulla particella dagli altri corpi dell'universo in grado di interagire dinamicamente con la particella P. In questo consiste il **secondo principio**.

Sia ora Σ uno spazio non inerziale e $\mathbf{a}_\tau$ e $\vec{\omega}_\tau$ siano l'accelerazione e la velocità angolare di trascinamento di P in Σ' ($T_{\Sigma'}$). Detta $\mathbf{a}_*$ l'accelerazione di P in Σ, e $\mathbf{a}$ quella in Σ', dal teorema di Coriolis segue

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_* - \mathbf{a}_\tau - 2\,\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}\,.$$

Moltiplicando per la massa m della particella si ha

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_* - m\mathbf{a}_\tau - 2m\,\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}\,. \tag{2.14}$$

Da 2.13 segue che $m\mathbf{a}_* = \mathbf{F}$ (forza assoluta) e quindi, da 2.14,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_\tau - 2m\,\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}\,. \tag{2.15}$$

Tale equazione rappresenta l'equazione della dinamica in un riferimento non inerziale.

Si definisce

$$\mathbf{F}_\tau = -m\mathbf{a}_\tau$$

forza di trascinamento, mentre

$$\mathbf{F}_\mathbf{c} = -2m\,\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}$$

si dice *forza di Coriolis*.

L'equazione vettoriale 2.13 (oppure la 2.15) proiettata sugli assi di un riferimento $T(0, x_1, x_2, x_3)$ fornisce un sistema di equazioni differenziali

$$m\ddot{x}_i = \phi_i(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \qquad i = 1, 2, 3$$

per il quale si suppongono valide ipotesi analitiche di esistenza ed unicità delle soluzioni. Assegnate quindi le condizioni iniziali $x_i(0) = x_i^0$ e $\dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0$ — posizione iniziale e velocità della particella P — il moto è allora determinato. In questo consiste il cosiddetto *carattere deterministico* della Meccanica Classica, e lo stesso si estenderà poi a tutti i sistemi meccanici a finito numero di gradi di libertà.

2.5 Dinamica in un riferimento terrestre

2.5.1 Premesse

Il riferimento relativo scelto è quello in Figura 2.5.1, dove Ω è l'origine e il punto iniziale del moto della particella P, l'asse x è tangente al parallelo locale e rivolto verso Est, y passa per il centro della Terra O ed è la verticale ascendente e z è la tangente al meridiano locale ed è orientato verso Sud.

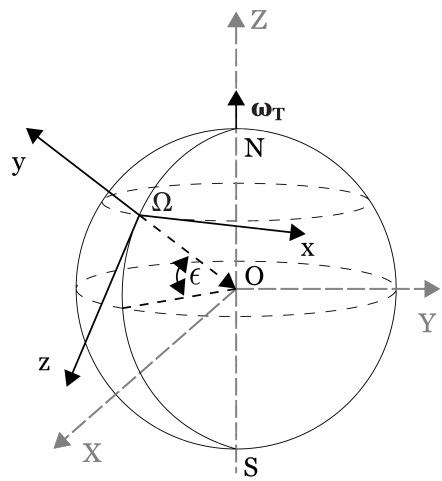


Figura 2.4: *Dinamica di un riferimento terrestre.*

Il riferimento assoluto ha origine in O, l'asse Z è rivolto come $\vec{\omega}_\tau$ (velocità angolare della Terra) e X, Y sono orientati verso le galassie.
Tale riferimento può ritenersi *inerziale* (per non lunghi intervalli di tempo).

Relativamente al riferimento (Ω, x, y, x), l'equazione del moto di P è[5]

$$m\mathbf{a} = (-\gamma \frac{mM_\oplus}{OP^3} OP - m\mathbf{a}_\tau) - 2m\,\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}\,.$$

Come è chiaro, la forza assoluta si riduce all'attrazione gravitazionale della Terra[6] — supposta sferica e omogenea.

[5] Dove $\vec{\omega}_\tau = 7,27 \times 10^{-5}$rad/sec.
[6] E' necessario però trascurare altre forze, in particolare la resistenza dell'atmosfera.

E' possibile inglobare i primi due termini in parentesi dell'equazione precedente e scrivere (semplificando m)

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - 2\,\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v} \tag{2.16}$$

dove, per *moti prossimi* a Ω, è lecito considerare $\mathbf{g}$ costante e parallelo all'asse y.[7]
Indicata con ϵ la latitudine, le componenti di $\vec{\omega}_\tau$ sono

$$\vec{\omega}_\tau = (0, \omega_\tau \sin\epsilon, -\omega_\tau \cos\epsilon)\,.$$

Esplicitamente, se x, y, z sono le coordinate di P, la 2.16 è

$$\ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k} = -g\,\mathbf{j} - 2\,\vec{\omega}_\tau \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \sin\epsilon & -\cos\epsilon \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \tag{2.17}$$

che, proiettata sugli assi, fornisce il sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\omega_\tau \sin\epsilon \cdot \dot{z} - 2\omega_\tau \cos\epsilon \cdot \dot{y} \\ \ddot{y} = -g + 2\omega_\tau \cos\epsilon \cdot \dot{x} \\ \ddot{z} = 2\omega_\tau \sin\epsilon \cdot \dot{x} \quad . \end{cases} \tag{2.18}$$

In generale, le condizioni iniziali sono:

$$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0$$

[7]Si considerino moti di P "abbastanza *vicini*" alla superficie terrestre e *prossimi* a Ω, al più, qualche decina di chilometri.
Nella formula

$$\mathbf{a}_\tau = \mathbf{a}_{\mathbf{\Omega}} + \dot{\vec{\omega}}_\tau \wedge \Omega P + \vec{\omega}_\tau \wedge (\vec{\omega}_\tau \wedge \Omega P)$$

possiamo considerare $\dot{\vec{\omega}}_\tau \approx \mathbf{0}$ e $\vec{\omega}_\tau \wedge (\vec{\omega}_\tau \wedge \Omega P) \approx \mathbf{0}$, questo perché ω^2 è dell'ordine di 10^{-10} e ΩP è "piccolo". Ne viene che

$$\mathbf{a}_\tau \approx \mathbf{a}_{\mathbf{\Omega}}\,,$$

dove $|a_\Omega| = \omega^2 |\Omega\Omega'|$ essendo Ω' la proiezione ortogonale di Ω sull'asse terrestre.
Si definisce $\mathbf{g}$ — accelerazione di gravità — come

$$\mathbf{g} = \gamma \frac{M_T OP}{OP^3} + \mathbf{a}_{\mathbf{\Omega}}$$

che varia sia con $|OP|$ che con la latitudine. L'*approssimazione* consiste allora in questo:

a. $|\mathbf{g}| =$ costante;

b. $\mathbf{g}$ è parallelo all'asse y.

L'ipotesi (a.) è certamente lecita per quei moti che non si discostino molto da Ω e abbastanza vicini alla superficie o, in altre parole, *non molto alti*. Ma poiché dipende dalla latitudine, anche (b.) è lecito: l'angolo tra $\mathbf{g}$ e l'asse y sarà al massimo $0.2°$.

Il sistema 2.18 è lineare a coefficienti costanti e, in questo caso, di immediata soluzione. Integrando infatti (tra 0 e t) la seconda e la terza equazione del sistema, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{y} - \dot{y}_0 = -gt + 2\omega_\tau \cos\epsilon \cdot x \\ \dot{z} - \dot{z}_0 = 2\omega_\tau \sin\epsilon \cdot x \quad . \end{cases} \tag{2.19}$$

Da 2.19 si ricavano $\dot{y}$ e $\dot{z}$ che, sostituite nella prima equazione di 2.18, forniscono un'equazione differenziale nella sola x a coefficienti costanti e di facile soluzione.

2.5.2 Deviazione dei gravi verso oriente

Si vogliono integrare le equazioni 2.18 con le condizioni iniziali

$$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0 = 0\,.$$

Le 2.19 divengono

$$\begin{cases} \ddot{y} = -gt + 2\omega_\tau \cos\epsilon \cdot x \\ \ddot{z} = 2\omega_\tau \sin\epsilon \cdot x \end{cases}$$

che sostituite nella prima equazione del sistema 2.18 forniscono

$$\ddot{x} + 4\omega_\tau^2 x = (g2\omega_\tau \cos\epsilon)t\,. \tag{2.20}$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è quindi

$$\bar{x} = c_1 \cos 2\omega_\tau + c_2 \sin \omega_\tau t\,,$$

mentre l'integrale particolare di 2.20 può ricercarsi nella forma $\varphi(t) = At + B$. Sostituendo φ e $\ddot{\varphi}$ in 2.20 risulta

$$4\omega_\tau^2(At + B) = 2g\omega_\tau \cos\epsilon t$$

e quindi $B = 0$, mentre

$$A = \frac{g}{2\omega_\tau} \cos\epsilon\,.$$

Ne viene quindi che l'integrale generale di 2.20 è

$$x = c_1 \cos 2\omega_\tau t + c_2 \sin 2\omega_\tau t + \frac{g}{2\omega_\tau} \cos\epsilon \cdot t\,. \tag{2.21}$$

Le costanti arbitrarie c_1 e c_2 si debbono determinare mediante le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ e, pertanto, segue che

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \quad \Rightarrow \quad 2\omega_\tau c_2 + \frac{g}{2\omega_\tau}\cos\epsilon \end{aligned}$$

e quindi $c_2 = -\frac{g}{4\omega_\tau^2}\cos\epsilon$.
In definitiva la soluzione è

$$x(t) = \frac{g}{4\omega_\tau^2}\cos\epsilon[-\sin 2\omega_\tau t + 2\omega_\tau t]\,. \tag{2.22}$$

Essendo noto che l'arco è sempre maggiore del suo seno, ovvero $\alpha \geq \sin\alpha$ $\forall\alpha$, dalla 2.22 risulta che $\forall t > 0$, $x(t) > 0$.
In definitiva il grave P devia verso Est, ovvero nella direzione delle x positive.

Osservazione

Nella figura si è considerato il fenomeno nell'emisfero Nord, ma cosa succede nell'emisfero Sud? Succede esattamente la stessa cosa: il grave P devia verso Est. Nell'emisfero Sud, infatti, la latitudine sarebbe negativa e, poiché $\cos -\epsilon = \cos\epsilon$, la 2.22 indica che anche a Sud la deviazione è verso Est.
Diversa nei due emisferi, e anzi opposta, è la deviazione dei moti che — ad esempio — avvengono parallelamente alla superficie terrestre (vedi paragrafo 2.5.3).

Ricordando che $\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \parallel \frac{u^5}{5!}$ ..., la soluzione di 2.22 diviene più espressiva approssimando il termine in parentesi quadra e fermando l'approssimazione al secondo termine. In questo modo si ha $u - \sin u = \frac{u^3}{3!}$ e la 2.22 fornisce

$$x \cong \frac{g}{4\omega_\tau}\cos\epsilon(\frac{2\omega_\tau t}{3!})^3 = \frac{1}{3}g\omega_\tau\cos\epsilon\cdot t^3\,, \tag{2.23}$$

che facilita i calcoli.
Nota x, da 2.19 si possono dedurre — con un'integrazione — y e z. Usando per x l'approssimazione 2.23 si ottiene

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{g}{6}\omega_\tau^2\cos^2\epsilon\cdot t^4 \\ z = \frac{g}{6}\omega_\tau^2\sin\epsilon\cos\epsilon\cdot t^4 \quad . \end{cases} \tag{2.24}$$

Le formule 2.24 indicano che l'azione della forza di Coriolis ha

- un effetto di "alleggerimento" del corpo (vedi la prima equazione di 2.24);
- un effetto di deviazione verso l'equatore (vedi la seconda equazione di 2.24).

Ciò vale in entrambi gli emisferi: la cosa è ovvia per la prima equazione del sistema (2.24) mentre, la seconda, indica una deviazione che sarà rivolta verso gli z positivi nell'emisfero Nord e verso gli z negativi dell'emisfero Sud ($\epsilon < 0$), deviazione che risulta però in entrambi i casi verso l'equatore. Ad ogni modo, si osservi che nella 2.24 compare ω_τ^2, un fattore dell'ordine di 10^{-10}: si tratta allora di effetti piccoli rispetto alla deviazione 2.23, in cui ω_τ compare invece linearmente.

Esempio

Pensiamo, per semplicità, di considerare il problema all'equatore ($\epsilon = 0$, $\cos\epsilon = 1$): la deviazione è massima e risulta $z = 0$ e

$$x = \frac{g}{3}\omega_\tau t^3 \,. \tag{2.25}$$

Calcoliamo la deviazione nel caso che il grave cada da 400m. Il tempo di caduta è fornito dalla prima equazione del sistema 2.24[8]:

$$-400 = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{g}{6}\omega_\tau^2 t^4 \tag{2.26}$$

e, sostituendo il tempo così ottenuto in 2.25, si trova $x = \delta \cong 17.6$cm, che sarà naturalmente verso Est.
Proseguendo, e accontentandosi di un'approssimazione ulteriore, si trascuri ω_τ^2 nella 2.26 per ottenere $t^2 = \frac{800}{y} \simeq 81$ e quindi, $t = 9$s. Da 2.25 segue infine $\delta \cong 17.5$cm.

2.5.3 Moti paralleli alla superficie terrestre

Un punto che si muove parallelamente alla superficie terrestre tende — rispetto alla direzione del moto — a deviare verso *destra* nell'emisfero Nord e verso *sinistra* nell'emisfero Sud. Ciò è dovuto al fatto che la forza di Coriolis è

$$\mathbf{F} = -2m\,\vec{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v} = 2m\,\mathbf{v} \wedge \vec{\omega}_\tau \,.$$

[8] E' ovvio che assumiamo il riferimento con origine nel punto di partenza del grave.

Essa, dipendendo da ω_τ (che è piuttosto piccola) e da $\mathbf{v}$, ha effetti significativi solo per velocità elevate o per moti di lungo periodo.

Per tali moti la velocità di una particella all'istante t può assumersi (non lontano da Ω)

$$v = v_x \mathbf{i} + v_z \mathbf{k} \qquad (v_y \sim 0)\,.$$

La forza di Coriolis sulla massa unitaria è

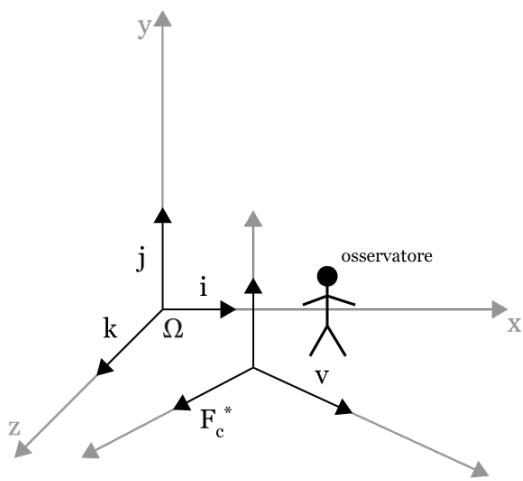
$$\mathbf{F_C} = 2\mathbf{v} \wedge \vec{\omega}_\tau = 2\omega_\tau \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & 0 & v_z \\ 0 & \sin\epsilon & -\cos\epsilon \end{bmatrix}\,,$$

quindi $\mathbf{F_C} = 2\omega_\tau(-v_z \sin\epsilon\, \mathbf{i} + v_x \cos\epsilon\, \mathbf{j} + v_x \sin\epsilon\, \mathbf{k})$.

Trascuriamo — ma non sarebbe essenziale — l'effetto di "alleggerimento" ($v_x \cos\epsilon\, \mathbf{j}$) e consideriamo la sola componente di $\mathbf{F_C}$ sul piano (Ω, x, z):

$$\mathbf{F_c^*} = 2\omega_\tau \sin\epsilon\,(-v_z \mathbf{i} + v_x \mathbf{k})\,.$$

Se pensiamo di essere all'emisfero Nord ($\sin\epsilon > 0$), tale componente — per un osservatore rivolto verso $\mathbf{v}$, e orientato come $\mathbf{j}$ — tende a deviare la particella verso destra.



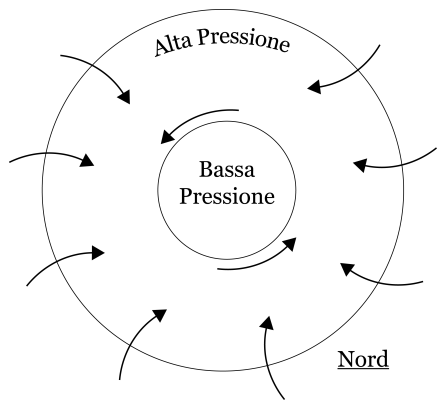
Infatti

$$\mathbf{F_C^*} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{j} = (v_x^2 + v_z^2) 2\omega_\tau \sin\epsilon > 0\,,$$

cioé i tre vettori formano una *terna levogira*. Nell'emisfero Sud ($\sin\epsilon < 0$) la terna è *destrogira*.

Esempio 1

Gli uragani avvengono quando una zona di pressione molto bassa è circondata da un'area di pressione molto alta. Masse atmosferiche accorrono con notevole velocità verso la zona di bassa pressione e le forze di Coriolis la fanno deviare (nell'emisfero Nord) a destra. Si determina così una intensa circolazione atmosferica in senso antiorario.
Nell'emisfero Sud il fenomeno è speculare e la circolazione avviene in senso orario.



Esempio 2

Il fenomeno dei vortici fluidi è analogo.

Esempio 3

Nel caso dei fiumi, ma anche delle correnti marine, la velocità è piccola ma l'effetto è di lungo periodo. E' infatti sperimentalmente verificato che i fiumi dell'emisfero Nord erodono di più la riva destra, mentre a Sud avviene l'esatto contrario.

Esercizio

Analizzare la circolazione atmosferica nei due emisferi nel caso in cui la zona interna sia di alta pressione e l'area circostante sia di bassa pressione.

2.5.4 Caso generale. Esempi.

Si può risolvere il sistema 2.18 assumendo condizioni iniziali generiche

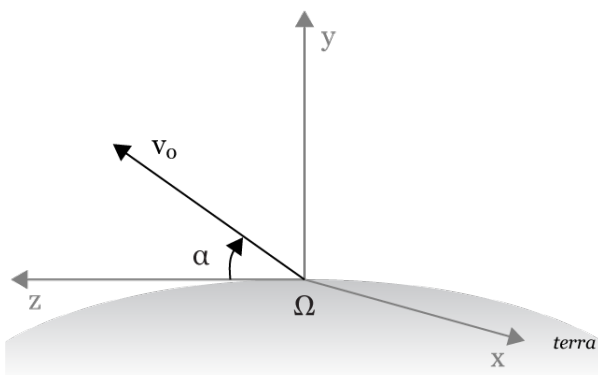
$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0$$

mentre — data l'arbitrarietà di scelta dell'origine Ω — continueremo a considerare $x(0) = y(0) = z(0)$.
Si procede come nel paragrafo 2.5.2: si tratta di sostituire le $\dot{y}$ e $\dot{z}$ ricavate dal sistema 2.19 (con $\dot{y}_0$ e $\dot{z}_0$ non nulli) nella prima equazione del sistema 2.18. Anche in questo caso si ricava un'equazione del secondo ordine, nella sola x, di facile soluzione e da cui si possono quindi trovare y e z mediante integrazione delle 2.19.

Consideriamo qui il caso in cui ($0 \leq \alpha \leq \pi$):

$$\dot{x}(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha, \qquad \dot{z}(0) = v_0 \cos\alpha \tag{2.27}$$

come può essere, per esempio, il casi di un tiro di artiglieria posta in Ω con "alzo" α sull'asse positivo delle z.



In tal caso le 2.19 divengono

$$\begin{cases} \dot{y} = -gt + 2\omega_\tau \cos\epsilon \cdot x + v_0 \sin\alpha \\ \dot{z} = 2\omega_\tau \sin\epsilon \cdot x + v_0 \cos\alpha \quad . \end{cases} \tag{2.28}$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema 2.18 si ottiene

$$\ddot{x} + 4\omega_\tau^2 x = 2\omega_\tau \cos\epsilon \cdot gt - 2\omega_\tau \sin(\alpha + \epsilon) \cdot v_0 \tag{2.29}$$

e l'integrale generale è quindi del tipo

$$x = c_1 \cos 2\omega_\tau t + c_2 \sin 2\omega_\tau t + (At + B) \tag{2.30}$$

Sostituendo $\varphi = At + B$ nella 2.29 si ricava

$$A = \frac{g}{2\omega_\tau} \cos\epsilon\,, \qquad B = -\frac{v_0}{2\omega_\tau} \sin(\alpha + \epsilon)$$

e quindi l'integrale 2.30 è

$$x = c_1 \cos 2\omega_\tau t + c_2 \sin 2\omega_\tau t + \frac{g}{2\omega_\tau} \cos\epsilon \cdot t - \frac{v_0}{2\omega_\tau} \sin(\alpha + \epsilon)\,. \tag{2.31}$$

Con le condizioni iniziali $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} c_1 = \frac{v_0}{2\omega_\tau} \sin(\alpha + \epsilon) \\ c_2 = -\frac{g}{4\omega_\tau^2} \cos\epsilon \end{cases}$$

e, in definitiva, la soluzione è

$$x = \frac{g\cos\epsilon}{4\omega_\tau^2}\Big[-\sin 2\omega t + 2\omega t\Big] + \frac{v_0 \sin(\alpha + \epsilon)}{2\omega_\tau}\Big[\cos 2\omega_\tau t - 1\Big]\,. \tag{2.32}$$

Procedendo ad approssimazioni già applicate nel paragrafo 2.5.2[9], si ottiene subito

$$x = \frac{g}{3}\omega_\tau \cos\epsilon t^3 - \omega_\tau v_0 \sin(\alpha + \epsilon) \cdot t^2 \tag{2.33}$$

(si osservi che 2.33 coincide con 2.23 per $v_0 = 0$).

Sostituendo 2.33 nelle 2.28 si ottengono, per integrazione, y e z, variabili che conterranno entrambe termini in ω_τ^2.
Se si considerano intervalli temporali "contenuti" possiamo trascurare tali termini in ω_τ^2 ottenendo

$$\begin{cases} y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t \\ z = v_0 \cos\alpha \cdot t \end{cases} \tag{2.34}$$

[9] Si tenga conto che $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + ...$

che è la stessa soluzione del moto con accelerazione costante g visto nel corso di *Fisica* e che equivale al considerare la Terra non rotante (e piatta). Si tratta di buone approssimazioni per intervalli di tempo brevi e per scostamenti da Ω abbastanza limitati, dell'ordine di qualche decina di chilometri.
In questo ordine di approssimazione è facile trovare il tempo $\bar{t}$ in cui il proiettile raggiunge il piano orizzontale ($y = 0$) e che, di fatto, arriva al suolo.
Da 2.30 segue infatti

$$\bar{t} = \frac{2v_0}{g} \sin\alpha \tag{2.35}$$

che, sostituito nella terza equazione del sistema 2.34, fornisce la *gittata*:

$$\bar{z} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha\,. \tag{2.36}$$

Sostituendo $\bar{t}$ nella 2.33 si ottiene la *deviazione* del proiettile rispetto al piano verticale (Ω, y, z) dovuta alla forza di Coriolis.

Esempio

Un cannone spara con alzo $\alpha = 15°$ e $v_0 = 1000$ m/sec da un punto di latitudine $\epsilon = 30°$ sulla superficie terrestre.

- Dopo quanti secondi il proiettile arriva al suolo?
  Da 2.35 si ricava il tempo:

$$\bar{t} = \frac{2000}{9.8} \cdot 0.25 \cong 52 \text{ s}$$

- Qual è la distanza percorsa?
  Da 2.36[10]

$$\bar{z} = 51 \text{ km}$$

- Qual è la deviazione?
  Da 2.33 segue

$$\delta = \omega_\tau \bar{t}^2 \big(\frac{g}{3} \cos 30° \bar{t} - 1000 \sin 45°\big) \cong -110 \text{ m}$$

  e la deviazione è dunque di circa 110 m a Ovest.

[10] Se considerassimo pure la resistenza dell'aria risulterebbe alquanto meno.

Esercizio

Risolvere lo stesso problema con alzo di 15° sull'asse negativo delle z. (Tiro verso Nord: $\alpha = 165°$)

Esercizio

Si supponga che Ω sia sull'equatore ($\epsilon = 0$) e di lanciare verso l'alto ($\alpha = \pi/2$) con velocità v_0. In tal caso 2.33 e 2.34 forniscono

$$\begin{cases} x = -\omega_\tau v_0 t^2 + \omega_\tau \frac{g}{3} t^3 \\ y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \\ z = 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

dove la prima equazione di 2.37 si può scrivere

$$x = \omega_\tau t^2 (-v_0 + \frac{g}{3} t)\,,$$

da cui deriva che

$$\begin{cases} x < 0 \text{ per } t < 3v_0/g \text{ il proiettile va verso Ovest} \\ x > 0 \text{ per } t > 3v_0/g \text{ il proiettile va verso Est} \end{cases} \tag{2.38}$$

questito: il proiettile ricadrà al suolo a Est o a Ovest?
(Risposta: a Ovest. Perché?)

Esercizio

Si svolga l'esercizio precedente se $v_0 = 30$ m/s e si trovi la deviazione del corpo quando raggiunge il suolo.

(Risposta: $2,7$ *cm, verso Ovest)*

Esercizio

Si consideri $\epsilon = 0$, $v_0 = 60$ m/s e z l'asse verticale rivolto verso l'alto. Dalle 2.38 segue che inizialmente il corpo si sposterà verso Ovest e, in seguito, andrà verso Est.
Da che quota h sulla superficie terrestre occorrerebbe lanciare un corpo (da Ω) affinché il corpo stesso atterri esattamente sulla verticale del punto di lancio ($x = 0$)?

(Risposta: 551 *m)*

Capitolo 3

Vincoli e spostamenti. Sistemi Olonomi

Premessa

Qui e nel seguito del testo considereremo funzioni scalari o vettoriali

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, t)$$

dove $(x_1, ..., x_n) \in C \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, e $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo temporale. Supporremo inoltre

$$f(x_1, ..., x_n, t) \in C^k_{C \times I}$$

con $k \geq 1$ quanto occorre.

3.1 Vincoli olonomi e anolonomi

Sia C un sistema la cui posizione, rispetto ad un riferimento T, sia individuata da un numero finito di parametri (o coordinate) $\xi_1, ..., \xi_r$.
Tale sistema può essere sia un sistema particellare di n punti, ed in tal caso le ξ_i possono essere le $3n$ coordinate cartesiane (x^i_1, x^i_2, x^i_3), così come potrebbe trattarsi di un corpo rigido, caso in cui le ξ_i (con $i = 1, ..., 6$) potrebbero essere le coordinate $(x_{1\Omega}, x_{2\Omega}, x_{3\Omega})$ di un punto Ω di C e gli angoli di Eulero (θ, ψ, ϕ).
Infine il sistema C può anche essere l'unione di un numero finito di sistemi

dei tipi appena descritti.

Se il sistema è particellare la posizione di ciascun punto può esprimersi in funzione dei parametri ξ_i:

$$OP_i = OP_i(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r)\,, \qquad i = 1, ..., n\,. \tag{3.1}$$

Se il sistema è continuo:

$$OP = OP(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r)\,, \qquad \forall P \in C\,. \tag{3.2}$$

Un sistema si dice **vincolato** se tutti – o alcuni – dei suoi punti non possono assumere posizioni *e/o* velocità arbitrarie, altrimenti viene definito **libero**.

In generale un vincolo bilaterale si esprime analiticamente mediante un sistema di funzioni indipendenti e, almeno, differenziabili:

$$f_k(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, ..., \dot{\xi}_r, t) = 0\,, \qquad (k = 1, ..., m)\,. \tag{3.3}$$

L'esplicita presenza del tempo in almeno una delle funzioni f_k significa che i vincoli sono **dipendenti dal tempo**. Se invece $\frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$, con $k = 1, ..., m$, i vincoli si dicono indipendenti dal tempo o **fissi**.

In particolare, i vincoli espressi dalle equazioni 3.3 vengono definiti **differenziali**.

Diremo **vincoli finiti** vincoli descritti da equazioni del tipo

$$f_k(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r, t) = 0\,, \qquad k = 1, ..., m\,, \tag{3.4}$$

con $m < r$. Supporremo che le $f_k \in C_1'$ siano indipendenti e quindi che la matrice jacobiana $(r \times m)$

$$\frac{\partial(f_1 ... f_m)}{\partial(\xi_1 ... \xi_r)} \tag{3.5}$$

abbia caratteristica $m\,\forall t \in I$ (intervallo assegnato).
Considereremo nel seguito anche vincoli differenziali limitandoci però al caso *lineare*:

$$\sum_1^r A_j^i(\xi^t)\dot{\xi}_i + B_j(\xi^t) = 0\,, \qquad \text{dove } j = 1, 2, ..., d\,. \tag{3.6}$$

Un vincolo differenziabile si dice **riducibile** ad un vincolo finito (o integrabile) se le forme differenziali deducibili dalla 3.6 sono *esatte*, ovvero se esistono d funzioni $\Phi_j(\xi_1, ..., \xi_r, t)$ tali che

$$d\Phi_j = \sum_1^r A_j^i d\xi_i + B_j \cdot dt\,, \qquad \text{dove } j = 1, 2, ..., d$$

I **vincoli olonomi** sono vincoli di tipo finito, o quantomeno riducibili a vincoli finiti, e si definisce **sistema olonomo** un sistema soggetto a tali vincoli.
Si dicono **vincoli anolonomi** vincoli differenziali non riducibili a vincoli finiti.

3.2 Gradi di libertà

Si consideri un sistema olonomo C i cui vincoli siano del tipo descritto dall'equazione 3.4 – o riducibili – e in cui valga la 3.5: ne viene che le $\xi_1, ..., \xi_r$ non sono indipendenti.
Mediante le 3.4 si potrebbero, per esempio, esprimere le coordinate ξ_{r-m+1}, ξ_{r-m+2}, ..., ξ_r in funzione delle ξ_1, ξ_2 ,..., ξ_{r-m}, da assumersi come indipendenti.

Il numero

$$N = r - m$$

definisce il **numero dei gradi di libertà** del sistema C.

Dato un sistema olonomo è possibile introdurre (in vari modi, almeno localmente) N parametri $q_1, q_2, ..., q_N$ — essendo N il numero dei gradi di libertà — ed esprimere le posizioni del sistema C mediante tali parametri, detti *parametri* o *coordinate* **lagrangiane**.

Se quindi C è particellare si avrà

$$OP_i = OP_i(q_1, q_2, ..., q_N, t)\,, \qquad i = 1, ..., m \tag{3.7}$$

mentre, se C è continuo

$$OP = OP(q_1, q_2, ..., q_N, t)\,, \qquad \forall P \in C\,. \tag{3.8}$$

Esempio 1

Un punto P sia vincolato su una superficie mobile

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = 0\,. \tag{3.9}$$

Il sistema ha 2 gradi di libertà:

$$N = 3_{\text{ n° delle coordinate di P}} - 1_{\text{ n° delle eq. del vincolo}} = 2\,.$$

Si potranno ad esempio assumere le coordinate $x_1 = q_1$, $x_2 = q_2$ come coordinate indipendenti e ottenere dalla 3.9

$$x_3 = x_3(q_1, q_2, t)\,.$$

Detti $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3}$ i versori fondamentali di $T(0, x_1, x_2, x_3)$ si può scrivere

$$OP = q_1\mathbf{c_1} + q_2\mathbf{c_2} + x_3(q_1, q_2, t)\mathbf{c_3}\,.$$

Esempio 2

Il sistema C sia formato dalla coppia di punti $P_1(x_1, x_2, x_3)$ e $P_2(y_1, y_2, y_3)$ vincolati in modo tale che P_1 rimanga sempre sull'asse x_1 e P_2 sempre sul piano $(0, x_1, x_2)$, e tali che la relativa distanza $l = |P_1P_2|$ rimanga costante.

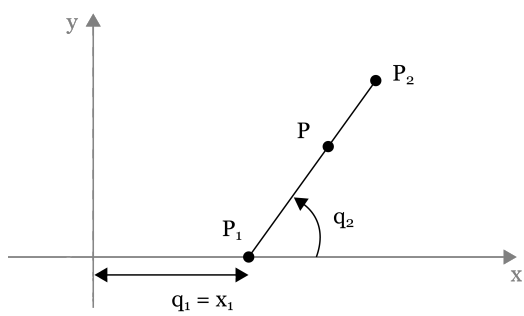


Figura 3.1: *Esempio 2.*

Il numero di gradi di libertà è 2: si hanno infatti 6 parametri che individuano i punti P_1, P_2 liberi e le seguenti 4 equazioni del vincolo:

$$x_3 = 0\,, \qquad y_3 = 0\,, \qquad x_2 = 0\,, \qquad (x_1 - y_1)^2 + y_2^2 = l^2$$

da cui è immediata la relazione prima descritta:

$$N = 6 - 4 = 2\,.$$

Assumendo le coordinate lagrangiane q_1, q_2 come in figura, si ottiene

$$\begin{cases} OP_1 = q_1\mathbf{c_1} \\ OP_2 = (q_1 + l\cos q_2)\mathbf{c_1} + l\sin q_2\mathbf{c_2}\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

Si osservi che, se invece di ritenere costante l si assume l come una funzione assegnata del tempo ($l = l(t)$), il sistema è ancora a due gradi di libertà e valgono le 3.10, ma solo a patto di assumere $l = l(t)$.
In tal caso il vincolo è *dipendente* dal tempo.

Esempio 3

Si consideri il sistema continuo costituito dalla sbarretta rigida P_1, P_2. Gli estremi P_1, P_2 sono vincolati come nell'esempio precedente e anche in questo caso il numero di gradi di libertà è 2.
Se P è un generico punto sulla sbarretta, e s è la sua distanza da P_1, si ha

$$OP = (q_1 + s\cos q_2)\mathbf{c_1} + l\sin q_2\mathbf{c_2}\,,$$

dove s non è una coordinata bensì un parametro che individua il generico punto $P \in C$ e dove le coordinate lagrangiane sono solo q_1, q_2.

Esercizio

Si dimostri che un corpo rigido con punto fisso ha 3 gradi di libertà, mentre un corpo rigido con asse fisso ne ha uno solo.

3.3 Spostamenti

Dato un sistema olonomo C, e introdotte le coordinate lagrangiane $(q_1, ..., q_n)$, abbiamo visto che vale la 3.1 se C è particellare o la 3.2 se C è continuo.
Si dice **spostamento possibile** per il sistema particellare C lo spostamento che porta il sistema dalla generica posizione P_i all'istante t alla posizione $P_i + dP_i$ all'istante $t + dt$, essendo

$$dP_i = \sum_1^N \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial OP_i}{\partial t} dt \tag{3.11}$$

ottenuta differenziando 3.1.
Per un sistema continuo lo spostamento possibile è definito da

$$dP = \sum_{1}^{N} \frac{\partial OP}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial OP}{\partial t} dt \tag{3.12}$$

ottenuta differenziando 3.2.

Si dice **spostamento virtuale**, indicato dal simbolo s, lo spostamento definito da

$$\delta P_i = \sum_{1}^{N} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h \,, \qquad i = 1, ..., n \tag{3.13}$$

che, per un sistema continuo, diventa

$$\delta P = \sum_{1}^{N} \frac{\partial OP}{\partial q_h} \delta q_h \,, \tag{3.14}$$

dove i δq_h sono arbitrari per l'indipendenza dei $(q_1, ..., q_N)$.
Come si vede la 3.13 e la 3.14 si ottengono da 3.11 e 3.12 considerando i vincoli invariabili nell'intervallo $t, t + dt$. Proprio per questo motivo gli spostamenti virtuali si dicono spostamenti a *vincoli congelati*.

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo – ovvero fissi – non c'è differenza tra spostamenti possibili e spostamenti virtuali.

Esempio

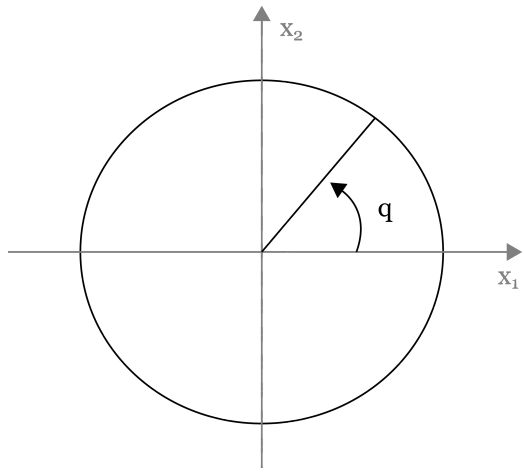
Si consideri un punto P vincolato sulla circonferenza di centro O e di raggio $R = R_0 t$ del piano $(0, x_1, x_2)$.

Il sistema ha un unico grado di libertà. Assunto l'angolo q come coordinata lagrangiana si può scrivere

$$\begin{cases} x_1 = R_0 t \cos q \\ x_2 = R_0 t \sin q \end{cases} \tag{3.15}$$

Lo spostamento possibile $dP(dx_1, dx_2)$ è allora fornito da

$$\begin{cases} dx_1 = -R_0 t \sin q \, dq + R_0 \cos q \, dt \\ dx_2 = R_0 t \cos q \, dq + R_0 \sin q \, dt \end{cases} \tag{3.16}$$



mentre quello virtuale $\delta P(\delta x_1, \delta x_2)$ sarà dato da

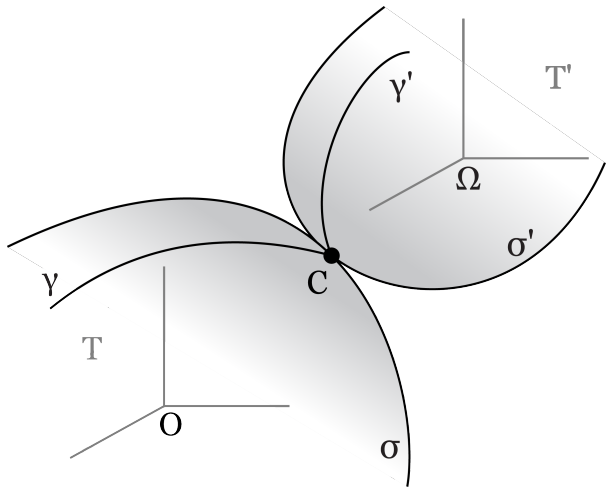
$$\begin{cases} \delta x_1 = -R_0 t \sin q \, \delta q \\ \delta x_2 = R_0 t \cos q \, \delta q \end{cases} \tag{3.17}$$

Si osservi che $\delta P = (-R_0 t \sin q \, \mathbf{c_1} + R_0 t \cos q \, \mathbf{c_2}) dq$ è tangente alla circonferenza, ma ciò non vale per lo spostamento possibile. Gli spostamenti virtuali si dicono infatti anche *spostamenti tangenti*.

3.4 Vincoli di rotolamento

Si consideri σ e σ' essere due superficie rigide (o il contorno di due corpi rigidi) entrambe regolari ed in moto l'una rispetto all'altra. Convenzionalmente identificheremo con σ la superficie fissa – e quindi in quiete rispetto ad una terna T intesa fissa – e con σ' la superficie mobile e solidale a T'. Il moto di σ' rispetto a σ si dice **rotolamento** se in ogni istante $t \in I$ le due superficie hanno almeno un punto di contatto.
Sia C un tale punto e, per semplicità, pensiamolo unico: esso in generale si muove sia rispetto a σ (cioè a T) sia rispetto a σ' (cioè a T'). Per questo motivo il moto del punto descrive due distinte traiettorie: γ, descritta su σ, e γ', descritta su σ'.

Sia $\mathbf{v_c}$ la velocità di C rispetto a T e $\mathbf{v'_c}$ la velocità di C rispetto a T' nel generico istante $t \in I$. Ne viene che $\mathbf{v_c}$ può essere vista come la



velocità assoluta di C e $\mathbf{v'_c}$ quella relativa (alla terna mobile T'): esse sono rispettivamente tangenti a γ e γ' e appartengono al comune piano tangente in C alle due superficie.

La differenza

$$\mathbf{v_c} - \mathbf{v'_c} \tag{3.18}$$

rappresenta quindi la velocità di trascinamento di C, ovvero la velocità di quel punto di σ' che è sovrapposto a C nell'istante t considerato. Scriveremo allora $\mathbf{v_c^s} = \mathbf{v_c} - \mathbf{v'_c}$ per indicare la **velocità di strisciamento**.
Se si verifica che $\mathbf{v_c^{(s)}} = 0$ per ogni $t \in I$, dove I è l'intervallo del moto, il moto che avviene è chiamato di **puro rotolamento** e si dirà che σ' rotola su σ *senza strisciare*.
In tale caso è evidente che

$$\mathbf{v_c} = \mathbf{v'_c}\,, \qquad \forall t \in I\,.$$

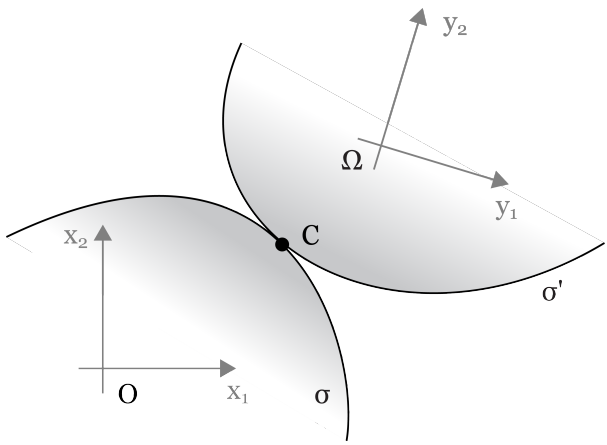
Se P è un qualsiasi punto del corpo rigido di contorno σ' – e se $\vec{\omega}$ è la velocità angolare di σ' – dalla formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi (1.10) segue che

$$\mathbf{v_p} = \mathbf{v_c} + \vec{\omega} \wedge CP\,.$$

Ma se il moto è di puro rotolamento, dev'essere $\mathbf{v_c} = \mathbf{0}$ (in quanto rappresenta la velocità di strisciamento) e quindi si ottiene la forma semplificata

$$\mathbf{v_p} = \vec{\omega} \wedge CP\,. \tag{3.19}$$

Per semplicità consideriamo ora due lamine piane di contorni σ e σ', dove σ' si muove con moto di puro rotolamento mantenendosi sul piano Π di σ e così da far sì che le traiettorie del punto di contatto C coincidano con porzioni di σ e σ'.



Detta $\vec{\omega}$ la velocità angolare di σ' – necessariamente perpendicolare a Π – data l'ortogonalità segue da 3.19

$$|\mathbf{v_p}| = \omega \cdot |CP| \,.$$

3.4.1 Un esempio di vincolo anolonomo

Si consideri una sfera rigida di raggio R vincolata a rotolare sul piano $(0, x_1, x_2)$.

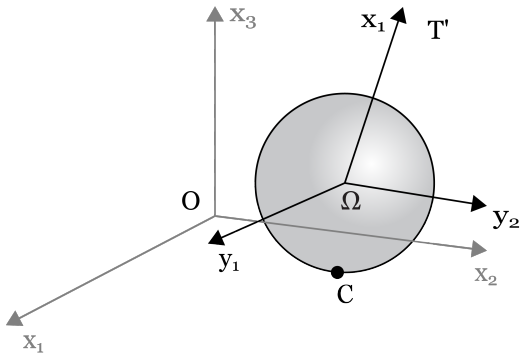
Il centro Ω abbia coordinate $(x^1_\Omega, x^2_\Omega, x^3_\Omega)$ e si utilizzino gli angoli di Eulero (Φ, Θ, Ψ) relativi ad una fissata terna $T'(\Omega, y_1, y_2, y_3)$ solidale.

Il sistema ha cinque gradi di libertà poiché il vincolo è espresso dall'unica equazione

$$x^3_\Omega = R \,.$$

Supponiamo, inoltre, che il vincolo sia di *puro rotolamento*: poiché $\mathbf{v_c}$ è la velocità del punto della sfera che all'istante t coincide con il punto di contatto, la condizione di puro rotolamento ($\mathbf{v_c} = \mathbf{0}$) comporta che

$$\mathbf{v_c} + \mathbf{v_\Omega} \wedge \Omega C = \mathbf{0} \,,$$



condizione che può essere riscritta come

$$\dot{x}^1_\Omega \mathbf{c_1} + \dot{x}^2_\Omega \mathbf{c_2} + \begin{bmatrix} \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & \mathbf{c_3} \\ \omega_{x_1} & \omega_{x_2} & \omega_{x_3} \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.20}$$

Ricordando le espressioni delle componenti della velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto alla terna fissa $T(0, x_1, x_2, x_3)$ (vedi il sistema di equazioni 1.28), da 3.20 segue

$$\begin{cases} \dot{x}^1_\Omega - R\dot{\Theta}\sin\Psi + R\dot{\Phi}\cos\Psi\sin\Theta = 0 \\ \dot{x}^2_\Omega - R\dot{\Theta}\cos\Psi + R\dot{\Phi}\sin\Psi\sin\Theta = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

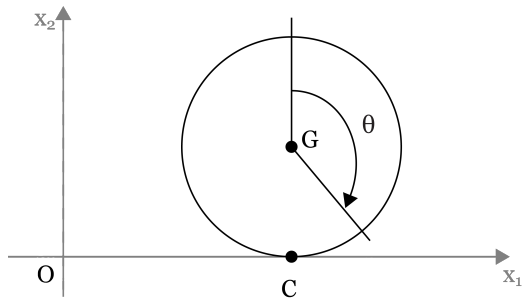
che rappresentano analiticamente il vincolo (differenziale) di puro rotolamento.
Le 3.21, moltiplicate per dt, si presentano nella forma

$$\begin{cases} d\dot{x}^1_\Omega - R\sin\Psi d\Theta + R\cos\Psi\sin\Theta d\Phi = 0 \\ d\dot{x}^2_\Omega - R\cos\Psi d\Theta + R\sin\Psi\sin\Theta d\Phi = 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

ed è evidente che le forme differenziali ai primi membri delle 3.22 non sono differenziali esatti. Ne segue che il vincolo è **anolonomo** e il sistema, costituito da una sfera che rotola senza strisciare su un piano, è un **sistema anolonomo**.

3.4.2 Il caso del disco

Si consideri ora, anziché una sfera, un disco di raggio R, mobile e *vincolato* a rotolare senza strisciare su una guida rettilinea coincidente con l'asse x del piano $T(0, x_1, x_2)$.



Sia x_1 la coordinata di C (o del baricentro G) e θ l'angolo in figura:

$$\mathbf{v_c} = \mathbf{v_G} + \vec{\omega} \wedge GC\,.$$

La condizione di puro rotolamento sarà quindi espressa da

$$\mathbf{v_G} + \wedge\vec{\omega}GC = \mathbf{0} \tag{3.23}$$

e, tenendo conto della perpendicolarità di $\vec{\omega}$ con $(0, x_1, x_2)$ – e del fatto che $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\mathbf{c_3}$ – da 3.23 si ottiene

$$\dot{x_1} - R\dot{\theta} = 0\,, \tag{3.24}$$

cioè

$$dx_1 - Rd\theta = 0\,, \tag{3.25}$$

equazione in cui il primo membro contiene una forma esatta.
Il vincolo differenziale 3.24 è quindi riducibile ad un vincolo finito che – pensando $x = 0$, se $\theta = 0$ – può porsi nella forma

$$x = R\theta\,. \tag{3.26}$$

In questo caso si trova che il vincolo di puro rotolamento è *olonomo* e, per la 3.26, il sistema ha un solo grado di libertà. Questo comporta che, indifferentemente, potremmo assumere come coordinata lagrangiana sia x che θ.

Osservazione

Qui si sono considerati vincoli *bilaterali*, ovvero vincoli espressi analiticamente da equazioni che coinvolgono i parametri determinativi della posizione del sistema $(\xi_1, ..., \xi_r)$.

Si dicono vincoli *unilaterali* quei vincoli che vengono espressi da disequazioni del tipo

$$\Phi_j(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r, t) \geq 0, \ , \qquad j = 1, ..., p\,.$$

Considereremo, per brevità, solo vincoli bilaterali.

Esempio

Si consideri il punto P vincolato sulla superficie regolare mobile

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = 0\,.$$

L'espressione

$$dP = dx_1\mathbf{c_1} + dx_2\mathbf{c_2} + dx_3\mathbf{c_3}$$

è uno spostamento possibile se i dx_i soddisfano a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0\,.$$

Per lo spostamento virtuale $\delta P = \delta x_1\mathbf{c_1} + \delta x_2\mathbf{c_2} + \delta x_3\mathbf{c_3}$ occorre invece che

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\delta x_3 = 0\,, \tag{3.27}$$

condizione che esprime che δP deve essere tangente alla superficie.
Infatti

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{c_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{c_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\mathbf{c_3}$$

è il gradiente della superficie considerata e 3.27 non è altro che

$$\vec{\nabla} f \times \delta P = 0\,.$$

Si osservi che $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ non sono arbitrari. Se per esempio assumiamo x_1 e x_2 come coordinate (lagrangiane) indipendenti, almeno localmente, dalla 3.27 segue che

$$x_3 = g(x_1, x_2, t)$$

e quindi

$$\delta x_3 = \frac{\partial g}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}\delta x_2\,.$$

In tal modo lo spostamento δP è esprimibile in funzione delle sole δx_1 e δx_2, che sono *arbitrarie* (data l'indipendenza di x_1 e x_2).

Può essere utile considerare gli spostamenti possibili o virtuali come spostamenti *elementari* (Paragrafo 1, Capitolo 1) in un moto "fittizio" del sistema.
Ad esempio lo spostamento virtuale $\delta P(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ dell'esempio precedente potrà essere pensato come lo spostamento elementare in un opportuno moto fittizio compatibile con i vincoli, "congelati" all'istante t.

Esercizio

Trovare gli spostamenti possibili e virtuali per il sistema indicato nell'Esempio 2, Paragrafo 3.2, con $l = l(t)$ assegnata funzione.

Capitolo 4

Dinamica dei sistemi olonomi

4.1 Energia cinetica

Si ricordi che se C è un sistema particellare – qui ed in seguito indicato con $\{P_i, m_i\}_i^n$ – la sua massa[1] è

$$m = \sum_1^n m_i \,,$$

mentre, se C è un sistema continuo di densità $\mu(x_1, x_2, x_3)$, la sua massa è

$$m = \int_C \mu dc \,,$$

dove con l'ultima notazione si intende l'integrale triplo $\iiint_C \mu \, dx_1, dx_2, dx_3$.

In relazione ad un determinato riferimento $T(0, x_1, x_2, x_3)$, l'energia cinetica di C – detta anche **forza viva** – è rispettivamente data da:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i v_i^2 \qquad \text{nel caso particellare,} \tag{4.1}$$

$$T = \frac{1}{2} \int_c \mu v^2 \qquad \text{nel caso continuo.} \tag{4.2}$$

[1] La definizione della *massa* di una particella è nota dal corso di Fisica, così per la *densità*.

Dato un sistema olonomo particellare C, per derivazione da 3.7 segue

$$\mathbf{v_i} = \sum_1^N \frac{\partial OP}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial OP}{\partial t} \qquad (i = 1, ..., n) \tag{4.3}$$

che, nel caso di vincoli fissi, si riduce a

$$\mathbf{v_i} = \sum_1^N \frac{\partial OP}{\partial q_h}\dot{q}_h \qquad (i = 1, ..., n)\,. \tag{4.4}$$

Perciò, nel caso di vincoli fissi, l'energia cinetica si calcolerà come

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_1^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_1^n m_i(\mathbf{v_i} \times \mathbf{v_i}) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_1^n m_i \left(\sum_{h=1}^N \frac{\partial OP_i}{\partial q_h}\dot{q}_h\right) \times \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial OP_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^N \left[\sum_1^n m_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h}\dot{q}_h \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right]. \end{aligned}$$

Ponendo

$$a_{hk} = \sum_1^n m_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h}\dot{q}_h \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\,, \tag{4.5}$$

si arriva a

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^N a_{hk}\,\dot{q}_h\dot{q}_k \tag{4.6}$$

che è l'espressione della forza viva nel caso di **vincoli fissi**.

Se i vincoli sono *dipendenti dal tempo*, dalla relazione 4.3 — come si potrebbe facilmente verificare — segue

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^N a_{hk}\,\dot{q}_h\dot{q}_k + \sum_1^N b_h\dot{q}_h + d\,, \tag{4.7}$$

dove

$$
\begin{aligned}
a_{hk} &= \sum_1^n m_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_k}\,, \\
b_h &= \sum_1^n m_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \times \frac{\partial OP_i}{\partial t}\,, \\
d &= \frac{1}{2}\sum_1^n m_i \Big(\frac{\partial OP_i}{\partial t}\Big)^2\,.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Nel caso in cui C sia *continuo*, e ricordando la relazione 3.8, si trova

$$
\mathbf{v} = \sum_1^N \frac{\partial OP}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial OP}{\partial t} \qquad P \in C
$$

da cui si ottiene facilmente – da 4.2 – che la forza viva può essere espressa in modo analogo alla forma 4.7 pur di intendere

$$
\begin{aligned}
a_{hk} &= \int_C \mu \frac{\partial OP}{\partial q_h} \times \frac{\partial OP}{\partial q_k} dC\,, \\
b_h &= \int_C \mu \frac{\partial OP}{\partial q_h} \times \frac{\partial OP}{\partial t} dC\,, \\
d &= \frac{1}{2}\int_C \mu \Big(\frac{\partial OP}{\partial t}\Big)^2 dC\,.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

In definitiva si conclude che per ogni sistema olonomo, particellare o continuo, nel caso generale di vincoli *dipendenti dal tempo* la forza viva sarà espressa da 4.7, mentre, nel caso particolare di *vincoli fissi*, si utilizzerà 4.6.

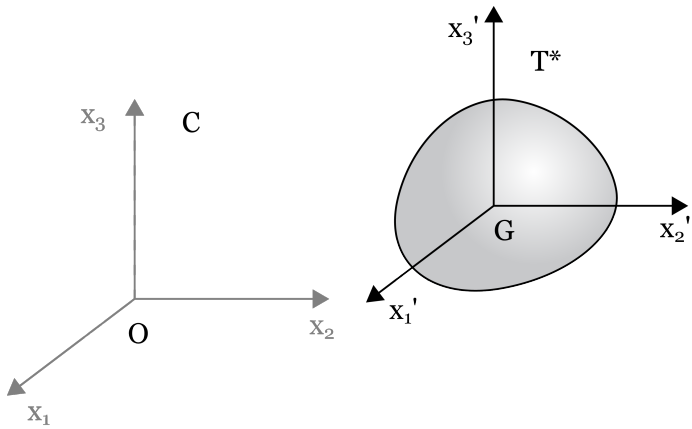
Osservazione

Si potrebbe dimostrare che la forma quadrica nelle $\dot{q}_h, \dot{q}_k$ che compare nella relazione 4.7 è definita *positiva*.
In particolare risulta

$$
\det\,[a_{hk}] > 0\,. \tag{4.10}
$$

4.2 Energia cinetica. Teorema di König

Consideriamo un sistema C ed un riferimento $T(0, x_1, x_2, x_3)$: si dice **moto relativo al baricentro** il moto di C rispetto ad una terna T^* con



origine nel baricentro G del sistema e avente assi di *direzione invariabile* rispetto a $T(0, x_1, x_2, x_3)$.

Si potrebbe dimostrare il seguente teorema:

Teorema 4.1 (Teorema di König) *La forza viva (energia cinetica) di un qualsiasi sistema C è fornita dall'equazione*

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T_G \,, \tag{4.11}$$

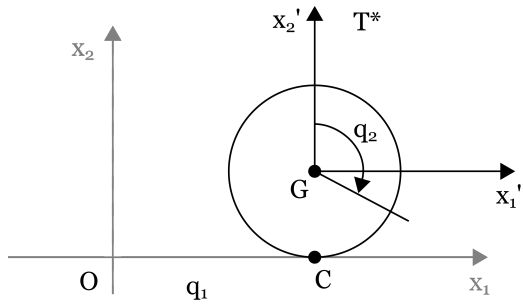
in cui m è la massa di C, $\mathbf{v_G}$ la velocità del baricentro e T_G la forza viva di C nel suo moto rispetto al baricentro.
In altri termini la forza viva di un sistema C è la somma della forza viva del baricentro – in cui si pensi concentrata l'intera massa – e della forza viva del moto di C rispetto al baricentro stesso.

Esempio 1

Si calcoli la forza viva di un disco omogeneo di massa m e raggio R vincolato a rotolare su una guida rettilinea costituita dall'asse x_1 della terna $T(0, x_1, x_2, x_3)$ di versori fondamentali $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3}$ e che si mantiene sempre nel piano $(0, x_1 x_2)$: il sistema così composto avrà perciò due gradi di libertà.

Dall'assunzione delle coordinate lagrangiane riportate in figura è evidente che

$$\mathbf{v_G} = \dot{q}_1 \mathbf{c_1}$$



e quindi il moto relativo al baricentro (rispetto alla terna T^*) sarà una rotazione avente velocità angolare

$$\vec{\omega} = -\dot{q}_2 \mathbf{c_3} \,.$$

E' noto dalla Fisica[2] che

$$T_G = \frac{1}{2}\mathcal{I}\omega^2 \,,$$

dove $\mathcal{I}$ è il momento di inerzia del disco relativo all'asse x_3'; dalla 4.11 segue

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{q}_2^2 \,.$$

Poiché, sempre dai corsi di Fisica, si conosce $\mathcal{I} = \frac{mR^2}{2}$, segue che

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{mR^2}{4}\dot{q}_2^2 \,. \tag{4.12}$$

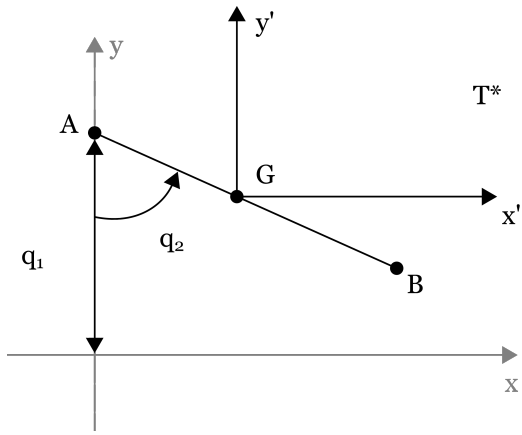
Supponiamo ora che il vincolo sia di *puro rotolamento*: q_1 e q_2 non sono indipendenti, bensì, ricordando la 3.26, si sottolinea la relazione $q_1 = Rq_2 + c$. Il sistema è allora ad un solo grado di libertà e, posto $\dot{q}_2 = \dot{q}_1/R$, dalla 4.12 segue che la forza viva totale sarà

$$T = \frac{3}{4}m\dot{q}_1^2 \,. \tag{4.13}$$

Esempio 2

Si calcoli la forza viva del sistema costituito da una sbarretta omogenea AB — di lunghezza l e massa m — vincolata in A sull'asse x_2 e che si muove sul piano $(0, x_1, x_2)$.

[2] Vedi il paragrafo 4.10.



Si scelgano i parametri lagrangiani come in figura:

$$x_G = \frac{l}{2}\sin q_2 \qquad y_G = q_1 - \frac{l}{2}\cos q_2$$

e quindi

$$\dot{x}_G = \frac{l}{2}\,\dot{q}_2\cos q_2 \qquad \dot{y}_G = \dot{q}_1 + \frac{l}{2}\,\dot{q}_2\sin q_2\,.$$

cioè

$$\mathbf{v_G} = \Big(\frac{l}{2}\,\dot{q}_2\cos q_2\Big)\mathbf{c_1} + \Big(\dot{q}_1 + \frac{l}{2}\,\dot{q}_2\sin q_2\Big)\mathbf{c_2}\,.$$

Si tratta ora di applicare semplicemente la formula di König(vedi 4.11):

$$T = \frac{1}{2}m\Big[\dot{q}_1^2 + \frac{l^2}{4}\,\dot{q}_2^2 + l\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2\Big] + T_G\,.$$

Anche in questo caso il moto relativo al baricentro è una rotazione e quindi

$$T_G = \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{q}_2^2\,,$$

dove $\mathcal{I} = \frac{ml^2}{12}$ e da cui si ottiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\Big[\dot{q}_1^2 + \frac{l^2}{4}\,\dot{q}_2^2 + l\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2\Big] + \frac{ml^2}{24}\dot{q}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m\Big[\dot{q}_1^2 + \frac{l^2}{3}\,\dot{q}_2^2 + l\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2\Big]\,. \end{aligned}$$

4.3 Lavoro. Forza conservativa

Consideriamo un punto soggetto ad una forza $\mathbf{F}$. In genere, in riferimento ad una terna $T(0, x_1, x_2, x_3)$, il vettore $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P, \mathbf{v}, t)$ può essere[3] scritto nella forma esplicita

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t)\,.$$

Detti ora $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3}$ i versori della terna T, $\mathbf{F}$ può essere riscritta nella forma

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{c_1} + F_2\mathbf{c_2} + F_3\mathbf{c_3}\,.$$

Indicheremo con dP il differenziale del raggio vettore $\mathbf{OP} = x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} + x_3\mathbf{c_3}$:

$$dP = dx_1\mathbf{c_1} + dx_2\mathbf{c_2} + dx_3\mathbf{c_3}\,.$$

Si definisce **lavoro infinitesimo** della forza $\mathbf{F}$ l'espressione

$$dL = \mathbf{F} \times dP = F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3\,. \tag{4.14}$$

Una forza si dice **posizionale** se è funzione solo di $P(x_1, x_2, x_3)$, ovvero una forza che non dipende né dalla velocità di P, né dal tempo.
Si avrà allora

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(P) = F_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{c_1} + F_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{c_2} + F_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{c_3}\,, \tag{4.15}$$

che penseremo definita in un aperto connesso $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Il *lavoro infinitesimo* sarà quindi

$$dL = F \times dP = F_1(x_i)dx_1 + F_2(x_i)dx_2 + F_3(x_i)dx_3\,, \tag{4.16}$$

che rappresenta una forma differenziale definita in $\mathcal{C}$.

Si dice inoltre che la forza posizionale (4.15) è **conservativa** se la forma 4.16 è esatta, ovvero se esiste una funzione $U = U(x_1, x_2, x_3)$ differenziabile in $\mathcal{C}$ tale che

$$dU = dL = F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3 \tag{4.17}$$

o, che è lo stesso, tale che in $\mathcal{C}$ sia

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = F_1\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = F_2\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial x_3} = F_3 \qquad \Big(\text{ovvero } \vec{\nabla} U = \mathbf{F}\Big)\,.$$

Infine, la funzione U si dice **potenziale**: dato un potenziale U, come è noto, ogni altro potenziale sarà del tipo $U + c$, dove c rappresenta una costante arbitraria.

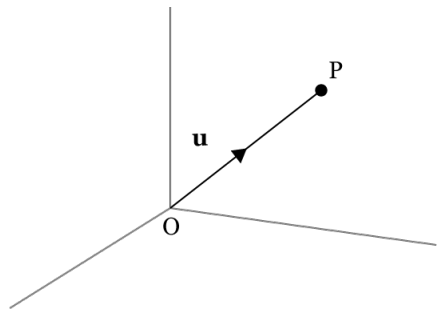
[3] In Meccanica Classica non si considerano forze dipendenti da $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, o da derivate successive.

4.3.1 Osservazione: forze centrali

Con riferimento a $T(0, x_1, x_2, x_3)$ – di versori fondamentali c_1, c_2, c_3 – si definisce **forza centrale** una forza del tipo

$$\mathbf{F} = f(r)\mathbf{u}\,, \tag{4.18}$$

dove $r = OP = x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} + x_3\mathbf{c_3}$, $\mathbf{u}$ è il versore di $\mathbf{r}$ e $f(r)$ è derivabile in $]-0, +\infty)$.



Sono di questo tipo la forza newtoniana gravitazionale

$$\mathbf{F} = -\gamma\frac{Mm}{r^2}\mathbf{u} \tag{4.19}$$

e la forza elastica di centro O

$$\mathbf{F} = -hr\mathbf{u} \qquad \text{con } h > 0\,. \tag{4.20}$$

Una forza centrale è quindi una *forza conservativa* e il suo potenziale, a meno di costanti, è

$$U = \int f(r)dr\,. \tag{4.21}$$

Infatti $dL = \mathbf{F} \times dP = f(r)\mathbf{u} \times (dx_1\mathbf{c_1} + dx_2\mathbf{c_2} + dx_3\mathbf{c_3})$ e, poiché

$$\mathbf{u} = \text{vers } \mathbf{r} = \frac{x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} + x_3\mathbf{c_3}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\,,$$

segue

$$dL = f(r)\frac{x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\,. \tag{4.22}$$

Per definizione $r = |OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ e dunque

$$dr = \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} ,$$

che, dalla 4.22, porta infine a

$$dL = f(r)dr .$$

Se quindi U è fornito dalla 4.21 si ottiene $dL = dU$, come volevasi dimostrare.

Dalle 4.19, 4.20 e 4.22 segue allora che

$$U = \gamma \frac{mM}{r} \qquad \text{è il potenziale gravitazionale} \tag{4.23}$$

$$U = -\frac{h}{2} r^2 \qquad \text{è il potenziale elastico}^4 . \tag{4.24}$$

4.4 Sollecitazioni e sollecitazioni conservative

Sia C un sistema particellare $\{P_i\}_1^n$ in cui sui punti P_i di coordinate (x_1^i, x_2^i, x_3^i) agiscono le forze $\mathbf{F_i}$. Diremo allora **sollecitazione** agente su C il sistema di forze $\{P_i, \mathbf{F_i}\}_1^n$.
Si dice *lavoro infinitesimo* della sollecitazione la quantità

$$dL = \sum_1^n \mathbf{F_i} \times dP_i = \sum_1^n (F_1^i dx_1^i + F_2^i dx_2^i + F_3^i dx_3^i) .$$

In modo analogo, se $\mathbf{F}dC$ è la forza agente sul generico elemento dC di un sistema continuo C, si avrà

$$dL = \int_C \mathbf{F} \times dP \, dC .$$

Supponiamo che ciascuna F_i sia conservativa e che abbia potenziale $U_i(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$, la sollecitazione è allora conservativa e il suo potenziale è

$$U = \sum_1^n U_i(x_1^i, x_2^i, x_3^i) . \tag{4.25}$$

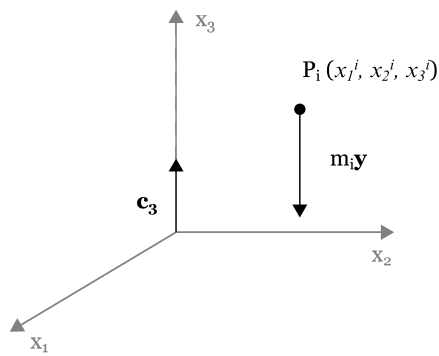
E' evidente infatti che risulta $dL = dU$.
Analogamente, se la forza $\mathbf{F}dC$ agente sull'elemento dC di un sistema

continuo è conservativa, e ha potenziale $u\,dC$, allora è conservativa anche la sollecitazione e si ha:

$$U = \int_C u\,dC\,. \tag{4.26}$$

4.5 Il caso del peso

Pensiamo ad un sistema particellare $\{P_i, m_i\}_1^n$ soggetto al peso e lo riferiamo ad una terna come in figura (asse verticale x_3 ascendente).



Avremo dunque $\mathbf{F_i} = -m_i g\,\mathbf{c_3}$, di potenziale $U_i = -m_i g x_3^i$, da cui risulta che il potenziale della sollecitazione è

$$U = \sum_1^n U_i = -\sum_1^n m_i g x_3^i\,. \tag{4.27}$$

Il baricentro G del sistema è però fornito da

$$OG = \frac{1}{m}\sum_1^n m_i\,OP_i \tag{4.28}$$

e quindi la terza coordinata di G sarà proprio $x_3^{(G)} = \frac{1}{m}\sum_1^n m_i\,x_3^i$.
Da quest'ultima – e da 4.27 – segue che

$$U = -mg\,x_3^{(G)}\,. \tag{4.29}$$

Tale formula sussiste anche se il sistema è continuo, ma questo non lo dimostreremo.
Si badi che la 4.29 è riferita ad una terna in cui x_3 è la verticale *ascendente*.

4.6 Caso della forza centrifuga

Sia $T(0, x_1, x_2, x_3)$ una terna rotante rispetto ad una terna inerziale, $\vec{\omega} = \omega\, \mathbf{c_3}$ la velocità angolare (ω = cost) e P un punto che – per ora – penseremo vincolato a rimanere nel piano $(0, x_1, x_2)$.
Su P agisce quindi una *forza apparente* che si dice **forza centrifuga**

$$\mathbf{F_c} = m\omega^2 OP\,,$$

che si verifica subito essere **conservativa**.
Il lavoro dL è infatti una forma differenziale esatta:

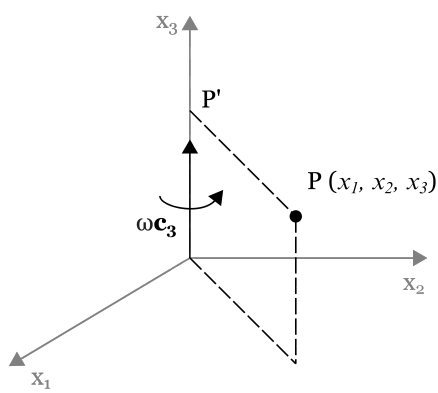
$$dL = m\omega^2 OP \times dP = m\omega^2(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)$$

e il potenziale, a meno di costanti, è:

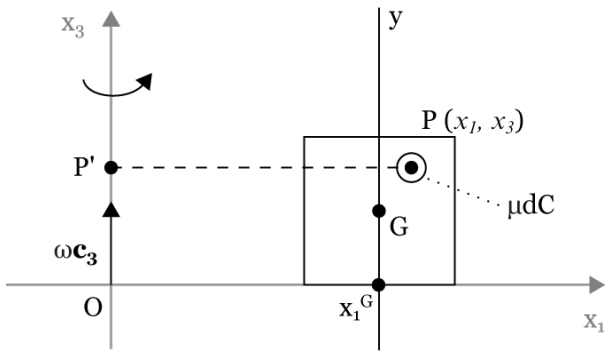
$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 (x_1^2 + x_2^2)\,. \tag{4.30}$$

Ovviamente il risultato non cambierebbe se P fosse generico: la forza centrifuga sarebbe

$$\mathbf{F} = m\omega^2 P'P$$



e si arriverebbe sempre alla 4.30, espressione in cui la forza dipende appunto solo dalla distanza di P dall'asse di rotazione x_3.



4.6.1 Esempio 1

Si pensi ad un sistema continuo, nello specifico ad una lamina omogenea e quadrata, vincolata come in figura.

Si consideri il generico punto $P(x_1, x_3)$ rappresentativo dell'elemento materiale di massa μdC: il potenziale della forza centrifuga agente sull'elemento μdC sarà

$$dF_c = \mu dC\, \omega^2 P'P\,,$$

in cui il potenziale è

$$udC = \frac{1}{2}\omega^2 \mu x_1^2 dC\,,$$

e quindi

$$U = \int_C u\, dC = \frac{1}{2}\omega^2 \int_C \mu x_1^2 dC = \frac{1}{2}\omega^2 I_{x_3}\,. \tag{4.31}$$

Come è noto

$$\int_C \mu x_1^2 dC = \mathcal{I}_{x_3}\,,$$

dove $\mathcal{I}_{x_3}$ è il momento d'inerzia della lamina rispetto a x_3. Per il teorema di Steiner si ha

$$\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_g + m\big(x_1^{(G)}\big)^2\,, \tag{4.32}$$

dove $\mathcal{I}_g$ è il momento di inerzia rispetto alla retta y (passante per G e parallela a x_3) che nell'esempio considerato dà:

$$\mathcal{I}_g = \frac{ml^2}{4} = \text{costante}\,.$$

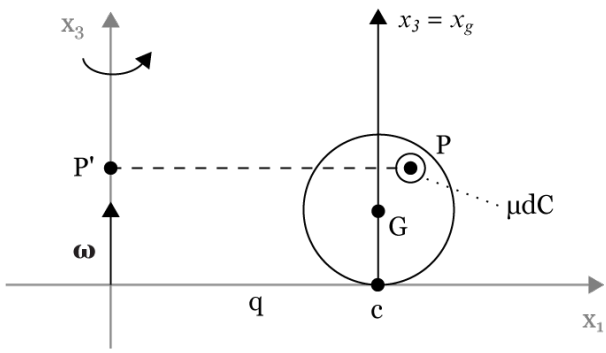
Posto $x_1^{(G)} = q$, il potenziale in coordinate lagrangiane risulta:

$$U = \frac{1}{2}\omega^2 m q^2 + \text{c}\,.$$

La 4.31 è una formula generale applicabile a qualsiasi lamina mobile sul piano $(0, x_1, x_3)$.

4.6.2 Esempio 2

Considerando $x_c = q$, si lascia allo studente il caso di un disco omogeneo di massa m che rotola senza strisciare sull'asse x.



Anche in questo caso

$$U_{dC}^{centr.} = \mu dC \frac{\omega^2}{2} x_1^2$$

e, quindi,

$$U^{centr.} = \frac{\omega^2}{2} \int_C \mu x_1^2 \, dC = \frac{\omega^2}{2} I_{x_3} \, ,$$

dove

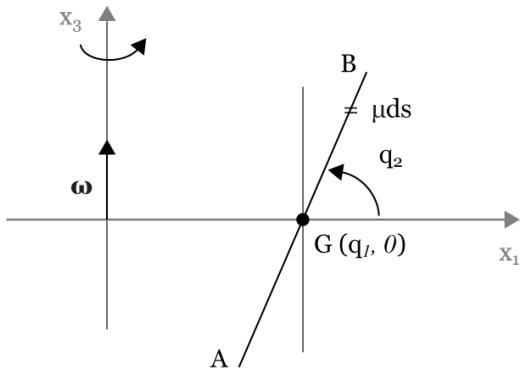
$$I_{x_3} = mq^2 + \mathcal{I}_G = \frac{\omega^2 m q^2}{2} + \frac{mR^2}{4} = \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \text{cost} \, .$$

Pertanto

$$U^{centr.} = \frac{m\omega^2 q^2}{2} \, .$$

4.6.3 Esempio 3

Si consideri ora l'esempio di una sbarretta omogenea — di lunghezza $2l$ e massa m — vincolata con il suo baricentro sull'asse x_1.



Si ha allora

$$U_{ds}^{centr.} = \frac{\omega^2}{2}\mu ds\, x_1^2$$

e

$$U = \frac{\omega^2}{2}\int \mu x_1^2\, ds = \frac{\omega^2}{2}\mathcal{I}_{x_3}\,. \tag{4.33}$$

In questo caso si ha ancora

$$I_{x_3} = \frac{\omega^2}{2}[mq_1^2 + \mathcal{I}_G]$$

ma, diversamente dagli esempi precedenti, questa volta $\mathcal{I}_G$ non è costante, infatti

$$\mathcal{I}_G = \int_s \mu ds\,(s\cos q_2)^2 = \frac{m}{2l}\cos^2 q_2 \int_{-l}^{l} s^2\, ds = \frac{ml^2}{3}\cos^2 q_2\,.$$

In tal caso, quindi, il potenziale 4.33 è

$$U = \frac{m\omega^2}{2}q_1^2 + \frac{m\omega^2 l^2}{6}\cos^2 q_2\,.$$

4.7 Componenti lagrangiane della sollecitazione

Dato un sistema olonomo e particellare C a N gradi di libertà, è noto che

$$OP_i = OP_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) \qquad \text{con } i = 1, ..., n\,,$$

mentre si avrà

$$OP = OP(q_1, q_2, ..., q_n, t)$$

se C è un sistema continuo.

Consideriamo ora il caso particellare. Se δP_i rappresenta lo spostamento virtuale, e cioè

$$\delta P_i = \sum_1^N \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h \,, \qquad i = 1, ..., n \,, \tag{4.34}$$

si dice **lavoro virtuale** della sollecitazione $\{P_i, F_i\}$ l'espressione

$$\delta L = \sum_1^n F_i \times \delta P_i$$

e, dalla 4.34,

$$\delta L = \sum_1^N \left(\sum_1^n F_i \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \right) \delta q_h \,. \tag{4.35}$$

Nel caso che C sia continuo, il lavoro virtuale è

$$\delta L = \int_C \mathbf{F} \times \delta P dC$$

e quindi

$$\delta L = \sum_1^N \left[\int_C \mathbf{F} \times \frac{\partial OP}{\partial q_h} dC \right] \delta q_h \,. \tag{4.36}$$

Sostituito in 4.35:

$$Q_h = \sum_1^n \mathbf{F_i} \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \qquad \text{con } h = 1, ..., N \,, \tag{4.37}$$

che diciamo **componenti lagrangiane della sollecitazione**.
Risulta quindi

$$\delta L = \sum_1^N Q_h \delta q_h \,. \tag{4.38}$$

Alla stessa espressione si perviene nel caso continuo a patto di assumere come componenti lagrangiane

$$Q_h = \int_C \mathbf{F} \times \frac{\partial OP}{\partial q_h} dC \,. \tag{4.39}$$

Si consideri ora un sistema olonomo *a vincoli fissi* (particellare o continuo) soggetto ad una sollecitazione posizionale e dunque con

$$Q_h = Q_h(q_1, q_2, ..., q_N)\,,$$

definite e almeno differenziabili in $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^N$ (aperto connesso): se la forma differenziale 4.38 è esatta si dice che la sollecitazione è *conservativa.* Ciò significa che esiste in $\mathcal{C}$ una funzione $U(q_1, ..., q_N)$ (potenziale) tale che

$$\delta U = \delta L = \sum_1^N Q_h \delta q_h\,, \tag{4.40}$$

o, che è lo stesso, tale che

$$\frac{\partial U}{\partial q_h} = Q_h\,, \qquad h = 1, ..., N\,. \tag{4.41}$$

Se $\mathcal{C}$ è "semplicemente connesso"[5] la forma 4.38 è esatta se (e solo se)

$$\frac{\partial Q_h}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_h}\,, \qquad h \neq j = 1, ..., N\,. \tag{4.42}$$

Generalizzeremo in seguito il concetto di potenziale estendendolo al caso in cui le Q_h dipendano anche dal tempo – così come accade quando i vincoli *non* sono fissi – o siano funzioni anche delle $\dot{q}_h$.

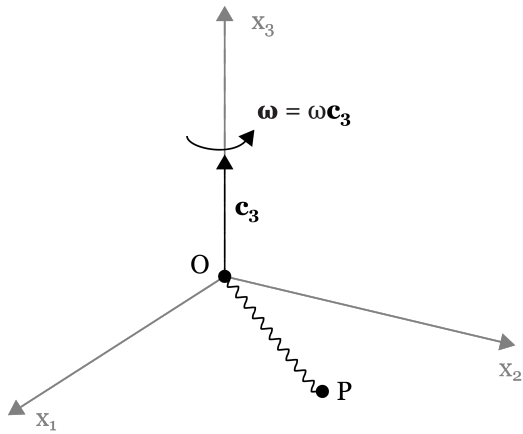
4.7.1 Esempio 1

Determinare le componenti lagrangiane della sollecitazione agente su un punto (P, m) vincolato a rimanere sul piano $(0, x_1, x_2)$ di un riferimento rotante — con $\omega =$ cost. intorno all'asse x_3 — rispetto ad un riferimento inerziale.
Su P agisce anche una forza elastica di costante h tale che

$$\mathbf{F_e} = -h\,OP$$

ma la sollecitazione è anche composta, oltre che dalla forza elastica, dalle forze apparenti.

[5] Per semplicità si pensi $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^N$ omeomorfo ad una sfera.



Possiamo assumere come coordinate lagrangiane le coordinate x_1, x_2 di P. Posto $x_1 = q_1$ e $x_2 = q_2$, la **forza elastica** diventa

$$\mathbf{F_e} = -h(q_1\mathbf{c_1} + q_2\mathbf{c_2})\,.$$

Si ricava

$$\delta L^{(e)} = Q_1^{(e)}\delta q_1 + Q_2^{(e)}\delta q_2 = \mathbf{F} \times \delta P\,,$$

dove

$$\delta P = \delta q_1\mathbf{c_1} + \delta q_2\mathbf{c_2}\,,$$

da cui si ottiene

$$\delta L^{(e)} = Q^{(e)}\delta q_1 + Q_2^{(e)}\delta q_2 = -hq_1\delta q_1 - hq_2\delta q_2\,,$$

ovvero

$$Q_1^{(e)} = -hq_1\,, \qquad Q_2^{(e)} = -hq_2\,.$$

In altro modo, ricordando che la forza elastica è una forza conservativa,

$$U^{(e)} = -\frac{h}{2}|OP|^2 = -\frac{h}{2}(q_1^2 + q_2^2)$$

e quindi

$$\frac{\partial U^{(e)}}{\partial q_1} = Q_1^{(e)} = -hq_1\,, \qquad \frac{\partial U^{(e)}}{\partial q_2} = Q_2^{(e)} = -hq_2\,.$$

Anche la **forza centrifuga**

$$\mathbf{F_c} = m\omega^2(q_1\mathbf{c_1} + q_2\mathbf{c_2})$$

è una forza conservativa, pertanto

$$U^{(c)} = \frac{m}{2}\omega^2[q_1^2 + q_2^2]\,.$$

Ne viene che

$$Q_1^{(c)} = \frac{\partial U^{(c)}}{\partial q_1} = m\omega^2 q_1\,, \qquad Q_2^{(c)} = \frac{\partial U}{\partial q_2} = m\omega^2 q_2\,.$$

La **forza di Coriolis** è infine

$$\mathbf{F}^{(Cor.)} = -2m\omega\,\mathbf{c_3} \wedge [\dot{q}_1\mathbf{c_1} + \dot{q}_2\mathbf{c_2}] = 2m\omega\dot{q}_2\,\mathbf{c_1} - 2m\omega\dot{q}_1\,\mathbf{c_2}\,.$$

Poiché

$$\delta L^{(Cor.)} = Q_1^{(Cor.)}\delta q_1 + Q_2^{(Cor.)}\delta q_2 = \mathbf{F}^{(Cor.)} \times \delta P = 2m\omega\dot{q}_2\delta q_1 - 2m\omega\dot{q}_1\delta q_2\,,$$

ne viene

$$Q_1^{(Cor.)} = 2m\omega\dot{q}_2\,, \qquad Q_2^{(Cor.)} = -2m\omega\dot{q}_1\,. \tag{4.43}$$

Le 4.43 valgono anche se $\omega = \omega(t)\mathbf{c_3}$, ovvero se il modulo di $\vec{\omega}$ dipende dal tempo.
Le componenti lagrangiane della sollecitazione sono:

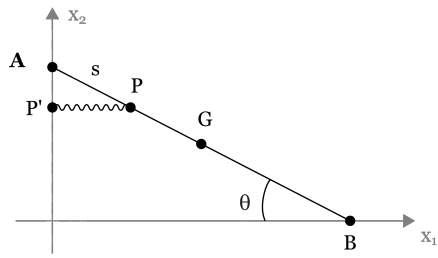
$$Q_i = Q_i^{(e)} + Q_i^{(c)} + Q_i^{(Cor.)} \qquad \text{con } i = 1, 2\,.$$

4.7.2 Esempio 2

La sbarretta rigida e omogenea AB, di lunghezza l e massa m, è vincolata con l'estremo B sull'asse x_1 e con l'estremo A sull'asse x_2, verticale ascendente.

Sulla sbarretta agisce una sollecitazione composta:

- dal peso
- da una forza elastica



Se P è un punto della sbarretta a distanza s da A, la forza elastica che agirà sull'elemento ds sarà:

$$\mathbf{F}ds = -hP'P\,ds\,,$$

essendo P' la proiezione ortogonale di P su x_2.
Indicato con θ il parametro lagrangiano determinare:

1. la componente lagrangiana delle forze elastiche;
2. provare che la sollecitazione elastica è conservativa e verificare che $\frac{\partial U}{\partial \theta} = Q_\theta^{(e)}$;
3. la componente lagrangiana del peso.

Punto 1

Dalla configurazione del sistema si ha

$$OP = s\cos\theta\,\mathbf{c_1} + (l-s)\sin\theta\,\mathbf{c_2}\,.$$

Da 4.39 segue allora

$$\begin{aligned} Q_\theta^e &= \int_l \mathbf{F}\times\frac{\partial OP}{\partial\theta}ds = \int_0^l -hs\cos\theta\,\mathbf{c_1}\times\left[-s\sin\theta\,\mathbf{c_1} + (l-s)\cos\theta\,\mathbf{c_2}\right] \\ &= \int_0^l hs^2\cos\theta\sin\theta ds = \frac{hl^3}{3}\cos\theta\sin\theta\,. \end{aligned}$$

Punto 2

La sollecitazione elastica è una sollecitazione conservativa, infatti il potenziale della forza elastica elementare è

$$U_{ds} = -\frac{h}{2}s^2\cos^2\theta ds$$

e quindi

$$U^{(e)} = \int_0^l -\frac{h}{2} s^2 \cos^2\theta ds = -\frac{hl^3}{6}\cos^2\theta\,,$$

da cui si ricava subito

$$\frac{\partial U^{(e)}}{\partial\theta} = \frac{hl^3}{3}\cos\theta\sin\theta = Q_\theta\,.$$

Punto 3

Come si è già visto nei capitoli precedenti, il peso è una forza conservativa, pertanto

$$U^{(p)} = -mgx_2^{(G)} \qquad \text{con } x_2^{(G)} = \frac{l}{2}\sin\theta$$

che, sviluppando, diventa

$$U^{(p)} = -mg\frac{l}{2}\sin\theta\,,$$

da cui si ottiene

$$Q_\theta^{(p)} = \frac{\partial U^{(p)}}{\partial\theta} = -mg\frac{l}{2}\cos\theta\,.$$

4.8 Lavoro di una sollecitazione agente su un corpo rigido

Ricordando la formula fondamentale

$$\mathbf{v_P} = \mathbf{v_\Omega} + \vec{\omega}\wedge\Omega P\,,$$

moltiplicando per dt si ottiene

$$dP = \mathbf{v_P}\,dt = \mathbf{v_\Omega}\,dt + \vec{\omega}dt\wedge\Omega P\,,$$

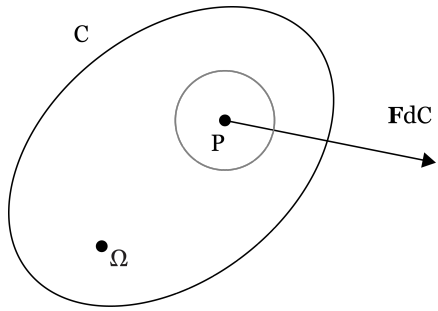
ovvero

$$dP = d\Omega + \vec{\omega}dt\wedge\Omega P$$

che fornisce lo spostamento elementare di un generico punto P.

Sia $\mathbf{F}dC$ la forza agente sull'elemento dC del corpo rigido C, il lavoro elementare di tale forza è

$$\mathbf{F}\times dP\,dC = d\Omega\times\mathbf{F}dC + \vec{\omega}dt\wedge\Omega P\times\mathbf{F}dC$$



ma, poiché i segni $\times$ e $\wedge$ nel prodotto misto del secondo membro sono permutabili, si giunge a

$$\mathbf{F} \times dP\, dC = \mathbf{F} \times d\Omega\, dC + \vec{\omega} dt \times \Omega P \wedge \mathbf{F} dC\,.$$

Il *lavoro elementare totale* è quindi

$$dL = \int_C \mathbf{F} \times dP\, dC = d\Omega \times \int_C \mathbf{F} dC + \vec{\omega} dt \times \int_C \Omega P \wedge \mathbf{F} dC\,.$$

E' noto che

$$\int_C \mathbf{F} dC = \mathbf{R} \qquad \text{e} \qquad \int_C \Omega P \wedge \mathbf{F} dC = \mathbf{M_\Omega}\,,$$

dove $\mathbf{R}$ è la risultante delle forze e $\mathbf{M_\Omega}$ il momento risultante rispetto a Ω. Il lavoro elementare è quindi

$$dL = d\Omega \times \mathbf{R} + \vec{\omega} dt \times \mathbf{M_\Omega}\,. \tag{4.44}$$

Una conseguenza interessante di questa formula è che il lavoro delle *forze interne* di un *sistema rigido* è **nullo**. Infatti, per la stessa definizione di forze interne[6], deve essere $\mathbf{R^i} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{M^i_\Omega} = \mathbf{0}, \forall\, \Omega$. Risulta cioè

$$dL^{int} = 0\,. \tag{4.45}$$

La formula 4.44 stabilita per il lavoro elementare vale anche per il *lavoro virtuale*. Si può infatti pensare allo spostamento virtuale come allo spostamento elementare di un moto fittizio – in questo caso rigido – con i vincoli "congelati" all'istante t.
Indicando con $\delta\mathbf{\Psi} = \vec{\omega} dt$ lo spostamento angolare (virtuale), dalla 4.44 segue che

$$\delta L = \delta\Omega \times \mathbf{R} + \delta\mathbf{\Psi} \times \mathbf{M_\Omega}\,. \tag{4.46}$$

[6]Le forze interne sono riducibili ad un insieme di coppie di braccio nullo, è quindi chiaro che $\mathbf{R^i} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{M^i_\Omega} = \mathbf{0}, \forall\, \Omega$

Esercizio

Si calcolino la risultante e il momento risultante (rispetto ad O) della sollecitazione agente sulla sbarretta rigida dell'Esempio 2.
Si calcoli il lavoro virtuale mediante la 4.44.

4.9 Vincoli ideali

Si consideri un punto vincolato su una superficie generica. Supponiamo che non sia soggetto a forze (attive) e che il suo moto non sia rettilineo. Ne viene che su di esso sta agendo una forza che non può che essere esercitata dal vincolo: tale forza si dice *reazione* (o forza) *vincolare*.
In generale assumiamo, per un punto vincolato, l'equazione del moto

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}\,,$$

essendo $\mathbf{F}$ la forza attiva[7] e $\mathbf{\Phi}$ la reazione vincolare rappresentata da un vettore. E' questo il postulato delle reazioni vincolari.
Nel seguito considereremo prevalentemente sistemi olonomi a vincoli ideali. Si tratta di vincoli capaci di esprimere reazioni vincolari tali che risulti sempre

$$\delta L^{(v)} = 0\,,$$

cioè che il lavoro virtuale delle reazioni vincolari agenti sul sistema risulti in ogni caso nullo per ogni spostamento virtuale del sistema.
Se il sistema è a vincoli fissi, il lavoro virtuale coincide con il lavoro possibile.
Considerando per semplicità un sistema particellare $\{P_i\}_1^n$, le $\mathbf{\Phi^i}$ sono le reazioni vincolari agenti sui punti P_i e si ha

$$\delta L^{(v)} = \sum_1^n \mathbf{\Phi_i} \times \delta P_i = \sum_1^n \mathbf{\Phi_i} \times \sum_1^N \frac{\partial OP_i}{\partial q_h}\delta q_h = 0 \qquad (4.47)$$

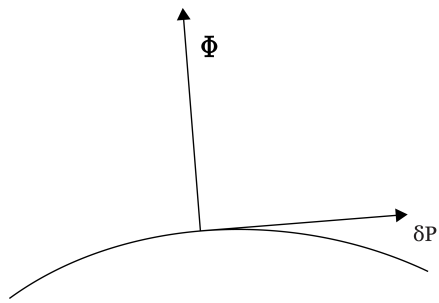
che equivale, data l'arbitrarietà delle δq_n, a

$$\sum_1^n \mathbf{\Phi_i} \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} = 0 \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,. \qquad (4.48)$$

Un sistema libero, cioè *non vincolato*, è a **vincoli ideali** (dato che $\mathbf{\Phi_i} = \mathbf{0}$); i vincoli *lisci* sono ideali dato che possono esprimere solo reazioni normali

[7] Contenente forze apparenti nel caso il riferimento non sia inerziale.

al vincolo (superficie, linee). Se, ad esempio, il sistema si riduce al solo punto P vincolato sulla superficie liscia $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$, poiché ogni spostamento virtuale è tangente alla superficie nell'istante t, risulta verificata la 4.47.



I vincoli lisci, però, non esauriscono la classe dei vincoli ideali. Si consideri il caso già visto del disco che rotola senza strisciare sulla guida rettilinea x_1: se disco e guida sono perfettamente rigidi – annullandosi quindi l'attrito volvente – e se le forze agenti sono parallele al piano del moto, la reazione vincolare è riducibile a un vettore $\mathbf{\Phi}$ applicato in C.
Come vedremo successivamente $\mathbf{\Phi}$ non è ortogonale a x_1, tuttavia dalla 4.46 si ha

$$\delta L^{(v)} = \delta\Omega \times \mathbf{\Phi} = 0$$

essendo $\delta\Omega = \mathbf{0}$. Ciò vale anche se (nella 4.46) $\mathbf{M}_{\mathbf{\Omega}}^{(\mathbf{v})} \neq \mathbf{0}$, purché il momento delle reazioni vincolari sia parallelo al piano del moto.
In seguito ci limiteremo a vincoli ideali: ciò consentirà di pareggiare – come sarà evidente – il numero delle equazioni ed il numero delle incognite del problema dinamico, il che, in genere, non accade per i sistemi vincolati. Si pensi infatti ad un sistema particellare $\{P_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}), m_i\}_1^n$ e siano i vincoli espressi dalle m equazioni

$$f_k = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, t) = 0 \qquad \text{con } k = 1, ..., m\,.$$

Le equazioni del moto sono

$$m\mathbf{a_i} = \mathbf{F_i} + \mathbf{\Phi_i} \qquad \text{con } i = 1, ..., n\,, \tag{4.49}$$

ne consegue che le equazioni sono $(3n + m)$ mentre le incognite sono

$$\left[3n\,(\text{le } x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) + 3n\,(\text{le } \Phi_1^{(i)}, \Phi_2^{(i)}, \Phi_3^{(i)})\right],$$

quindi il numero delle incognite eccede il numero delle equazioni e, più precisamente, si ha

$$6n - (3n + m) = 3n - m = N\,,$$

essendo N il numero dei gradi di libertà del sistema.
Questo schema ideale dei vincoli è spesso utile di per sé, ma risulta applicabile anche quando l'attrito non è trascurabile. Torneremo su questo aspetto in seguito.

Dalle equazioni 4.49 segue che

$$\mathbf{F_i} - m\mathbf{a_i} = -\vec{\phi}_i\,, \qquad i = 1, ..., n$$

e tali forze si dicono *forze perdute* in quanto, equilibrando le reazioni vincolari istante per istante, non contribuiscono al moto.
Se il vincolo è ideale, in ogni istante e per ogni spostamento virtuale risulta

$$\sum_1^n (\mathbf{F_i} - m_i\mathbf{a_i}) \times \delta P_i = 0\,, \tag{4.50}$$

che si definisce **equazione pura**[8] della dinamica. Questa può anche estendersi a sistemi continui e porta ad un principio generale che caratterizza il comportamento dinamico di ogni sistema meccanico a vincoli ideali, ovvero il **principio di D'Alembert**:

" *Il moto di un sistema a vincoli ideali è caratterizzato dal fatto che, per ogni spostamento virtuale a partire dalla posizione attuale, è nullo il lavoro delle forze perdute.* "

Vincolo di rigidità

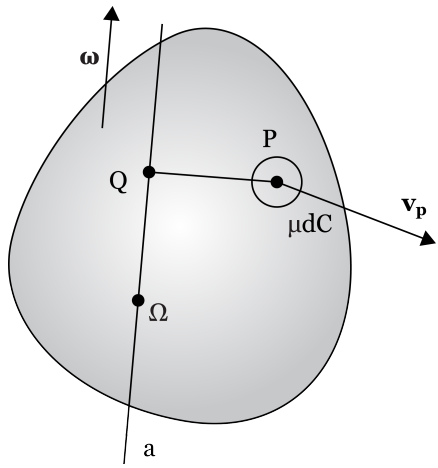
Il *vincolo di rigidità* è un vincolo ideale. Esso è infatti dovuto alle forze interne ($R^i = \mathbf{0}, M^i_\Omega = \mathbf{0}$) e quindi, per ogni spostamento virtuale, si ha

$$\delta L^v = \mathbf{R^i} \times \delta\Omega + \mathbf{M^i_\Omega} \times \delta\mathbf{\Psi} = 0\,.$$

4.10 Osservazioni e note

Un corpo rigido C — di densità $\mu(P) = \mu$ — ruota con velocità $\vec{\omega}$ intorno all'asse (fisso) a.

[8] "Pura" perché non contiene le incognite reazioni dei vincoli.



L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}\int_C \mu v_p^2 dC\,,$$

dove $\mathbf{v_p} = \vec{\omega} \wedge \Omega P$.
Se Q è la proiezione ortogonale di P sull'asse a allora

$$\mathbf{v_p} = \vec{\omega} \wedge (\Omega Q + QP) = \vec{\omega} \wedge QP\,,$$

quindi

$$T = \frac{1}{2}\int_C \mu(\omega \wedge QP)^2 dC = \frac{\omega}{2}\int_C \mu|QP|^2 dC\,.$$

Ma, ricordando che per definizione

$$\mathcal{I} = \int_C \mu|QP|^2 dC$$

è il momento d'inerzia di C rispetto all'asse a, si conclude che

$$T = \frac{\mathcal{I}}{2}\omega^2\,.$$

Esercizio

Calcolare T di una sfera omogenea — di massa M e raggio R — rotante intorno ad un diametro. Si faccia poi lo stesso per un ellissoide omogeneo rotondo (di semiassi a e b) rotante intorno ad un asse di simmetria.

Capitolo 5

Meccanica Lagrangiana

5.1 Equazioni di Lagrange

Si consideri un sistema olonomo C a vincoli ideali e sia C un sistema particellare $\{P_i\}_1^n$. Si noti che le equazioni a cui si perverrà rimangono valide anche per sistemi olonomi continui.
Se $(q_1, q_2, ..., q_N)$ sono coordinate lagrangiane, risulta

$$OP_i = OP_i(q_1, q_2, ..., q_N, t) \qquad \text{con } i = 1, ..., n\,. \tag{5.1}$$

Le equazioni del moto del sistema C sono

$$m_i \mathbf{a_i} = \mathbf{F_i} + \vec{\phi_i}\,, \tag{5.2}$$

dove $\mathbf{F_i}$ sono le forze attive — in cui devono comprendersi anche le forze apparenti se il riferimento non è inerziale — e $\vec{\phi_i}$ le forze vincolari.
Detto δP_i un generico spostamento virtuale di C, da 5.2 risulta

$$\sum_1^n m_i \mathbf{a_i} \times \delta P_i = \sum_1^n \mathbf{F_i} \times \delta P_i + \sum_1^n \vec{\phi_i} \times \delta P_i\,.$$

Tuttavia, poiché i vincoli sono ideali (vedi 4.47), quest'ultima equazione[1] diviene

$$\sum_1^n m_i \mathbf{a_i} \times \delta P_i = \sum_1^n \mathbf{F_i} \times \delta P_i \tag{5.3}$$

[1] Che esprime l'annullarsi del lavoro delle forze vincolari e l'annullarsi del lavoro virtuale delle forze perdute.

e, ricordando

$$\delta P_i = \sum \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h \,,$$

da 5.3 segue

$$\sum_1^n m_i \mathbf{a_i} \times \sum_1^N \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h - \sum_1^n \mathbf{F_i} \times \sum_1^N \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h = 0 \,,$$

pertanto

$$\sum_1^N \left[\sum_1^n m_i \mathbf{a_i} \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} - \sum_1^n \mathbf{F_i} \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \right] \delta q_h = 0 \,. \tag{5.4}$$

Ricordando la definizione delle componenti lagrangiane viste nel capitolo precedente, e posto

$$\tau_h = \sum_1^N m_i \mathbf{a_i} \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \,, \tag{5.5}$$

da 5.4 segue

$$\sum_1^N (\tau_h - Q_h) \delta q_h = 0$$

che — per l'arbitrarietà delle δq_h — comporta

$$\tau_h = Q_h \qquad \text{con } h = 1, 2, ..., N \,. \tag{5.6}$$

Queste ultime costituiscono un sistema di N equazioni nelle N incognite $q_1, q_2, ..., q_N$ e vengono definite **equazioni di Lagrange**.

Alle equazioni 5.6 si vuole ora dare una espressione più significativa che si dirà **2° forma delle equazioni di Lagrange**. Per semplicità di calcolo si ipotizzi che i vincoli siano fissi: in questo caso l'espressione dell'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_1^N a_h k \dot{q}_h \dot{q}_k \tag{5.7}$$

in cui, come visto nel capitolo 4, vale

$$a_{hk} = \sum_1^n m_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \,.$$

Da 5.5 segue

$$\tau_h = \sum_1^n m_i \mathbf{a_i} \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} = \frac{d}{dt} \sum_1^n m_i \mathbf{v_i} \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} - \sum_1^n m_i \mathbf{v_i} \times \frac{d}{dt} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \quad (5.8)$$

mentre, per derivazione da 5.1, segue

$$\mathbf{v_i} = \sum_1^N \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (5.9)$$

dove, essendo i vincoli fissi, in 5.1 non comprare esplicitamente la variabile t. Si suppone inoltre

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{dOP_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_h} \mathbf{v_i} \,. \quad (5.10)$$

Mediante 5.9 e 5.10, da 5.8 segue

$$\tau_h = \frac{d}{dt} \sum_1^n m_i \left(\sum_1^N \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} - \sum_1^n m_i \mathbf{v_i} \times \frac{\partial \mathbf{v_i}}{\partial q_h} \,,$$

ovvero

$$\tau_h = \frac{d}{dt} \sum_1^N \left(\sum_1^n m_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \times \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k - \sum_1^n m_i \mathbf{v_i} \times \frac{\partial \mathbf{v_i}}{\partial q_h} \,,$$

quindi, ricordando le espressioni a_{hk}, si ha

$$\tau_h = \frac{d}{dt} \sum_1^N a_{hk} \dot{q}_k - \frac{\partial}{\partial q_h} \left(\frac{1}{2} \sum_1^n m_i \mathbf{v_i} \times \mathbf{v_i} \right) .$$

In conclusione, da 5.7,

$$\tau_h = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \,.$$

Le equazioni di Lagrange 5.6 assumono la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \qquad \text{con } h = 1, 2, ..., N \,. \quad (5.11)$$

Alle stesse conclusioni si perviene anche nel caso di *vincoli dipendenti dal tempo*, con T fornita da

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^N a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_1^N b_h \dot{q}_h + d \,, \quad (5.12)$$

come visto in 4.7.
Per ottenere le equazioni di Lagrange è quindi sufficiente esprimere in coordinate lagrangiane l'energia cinetica T — fornita dalla 5.12 se i vincoli dipendono dal tempo, dalla 5.7 se i vincoli sono fissi — e le componenti lagrangiane della sollecitazione Q_h.

Nel caso in cui la sollecitazione sia conservativa, e U sia il potenziale, è noto che

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \tag{5.13}$$

da cui, posto

$$L = T + U \tag{5.14}$$

detta funzione di Lagrange (o **lagrangiano del sistema**), le equazioni 5.11 si possono scrivere

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,. \tag{5.15}$$

Se sul sistema C agiscono sia forze conservative che forze non conservative conviene calcolare il potenziale U della sollecitazione conservativa e le componenti lagrangiane della sollecitazione non conservativa Q'_h.
Le equazioni di Lagrange si scrivono allora nella forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial q_h} + Q'_h \qquad \text{con } h = 1, 2, ..., N\,. \tag{5.16}$$

Come si è visto, sono stati considerati fin qui sistemi particellari; le equazioni di Lagrange possono essere tuttavia stabilite anche per un sistema olonomo *continuo* a vincoli ideali pur di assumere per a_{hk}, b_h, d (nell'espressione 5.12 dell'energia cinetica) quelle fornite da 4.8 e le Q_h fornite da 4.39.

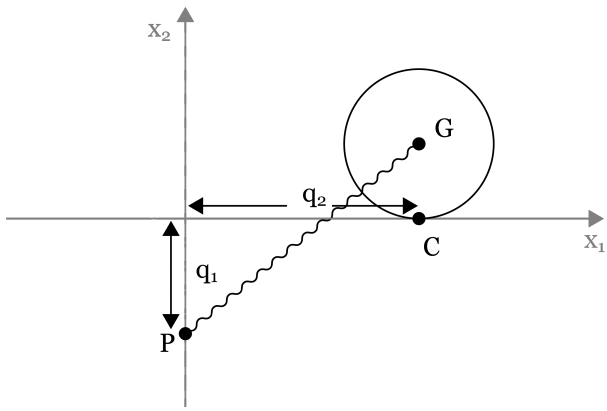
Osservazione

Evidentemente i vincoli ideali — a meno che il sistema C non sia libero — costituiscono una astrazione, un'idealizzazione.
Tale schema dei vincoli è spesso utile in sé, mentre in altri casi non è applicabile: ne è un esempio il caso in cui l'attrito non possa essere trascurato. Tuttavia, anche in tali casi, si possono assumere vincoli come ideali tenendo conto *solo* delle componenti normali delle reazioni vincolari e trattando

le componenti tangenziali di attrito come forze fornite da relazioni che si ottengono da leggi sperimentali.

5.1.1 Esempio 1

Scrivere e risolvere le equazioni di Lagrange per il sistema — costituito da un punto P di massa M — vincolato a rimanere sull'asse x_2 (asse verticale ascendente e liscio) e da un disco omogeneo di massa m e raggio R che rotola senza strisciare sull'asse x_1.
La sollecitazione è costituita dal peso e da una forza elastica dovuta ad una molla agente su P e su G.



Scelte le coordinate lagrangiane come in figura,

$$T = \frac{1}{2}M\dot{q}_1^2 + \frac{3}{4}m\dot{q}_2^2$$

mentre

$$U = -Mgq_1 - \frac{h}{2}\left[(q_1 - R)^2 + q_2^2\right].$$

Dunque

$$U = (hR - Mg)q_1 - \frac{h}{2}q_1^2 - \frac{h}{2}q_2^2\,.$$

Le equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_2} \end{cases}$$

per il sistema che stiamo considerando sono

$$\begin{cases} M\ddot{q}_1 = (hR - Mg) - hq_1 \\ \\ \frac{3}{2}\ddot{q}_2 = -hq_2 \end{cases}$$

In questo caso le equazioni sono quindi facilmente risolubili.
Si chiede di determinare il moto del sistema con le condizioni iniziali $q_1(0) = 0$, $\dot{q}_1(0) = 0$, $q_2(0) = q_2^0 > 0$, $\dot{q}_2(0) = 0$.
L'equazione

$$\ddot{q}_1 + \frac{h}{M}q_1 = \frac{hR - Mg}{M}$$

ha integrale generale $q_1 = c_1 \cos\sqrt{\frac{h}{M}}t + c_2 \sin\sqrt{\frac{h}{M}}t + \frac{hR-Mg}{h}$, mentre

$$\ddot{q}_2 + \frac{2h}{3m}q_2 = 0$$

ha integrale generale $q_2 = c_3 \cos\sqrt{\frac{2h}{3m}}t + c_4 \sin\sqrt{\frac{2h}{3m}}t$.
Derivando:

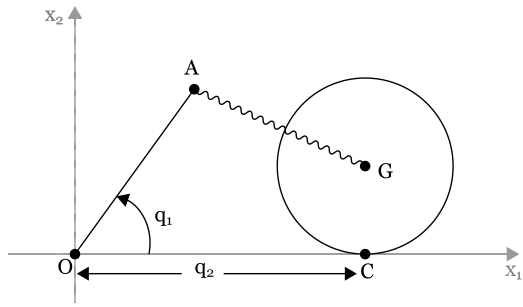
$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -c_1\sqrt{\frac{h}{M}}\sin\sqrt{h}Mt + c_2\sqrt{\frac{h}{M}}\cos\sqrt{h}Mt \\ \dot{q}_2 &= -c_3\sqrt{\frac{2h}{3m}}\sin\sqrt{\frac{2h}{3m}}t + c_4\sqrt{\frac{2h}{3m}}\cos\sqrt{2h}3mt\,. \end{aligned}$$

Le condizioni iniziali comportano infine

$$\begin{aligned} q_1(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad c_1 = -\frac{hr - Mg}{h} \\ \dot{q}_1(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad c_2 = 0 \\ q_2(0) = q_2^0 \quad &\Rightarrow \quad c_3 = q_2^0 \\ \dot{q}_2(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad c_4 = 0 \end{aligned}$$

ed il moto è fornito da

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{hR - Mg}{h}\cos\sqrt{\frac{h}{m}}t + \frac{hr - Mg}{h} \\ q_2 &= q_2^0 \cos\sqrt{\frac{2h}{3m}}t\,. \end{aligned}$$



5.1.2 Esempio 2

Il sistema è composto da una sbarra omogenea di lunghezza l e massa m e da un disco omogeneo di massa M e raggio R.

L'estremo O della sbarra OA è incernierata in O (con vincolo liscio) e il disco rotola senza strisciare sull'asse x_1. La sbarra e il disco si mantengono sul piano $(0, x_1, x_2)$ di un riferimento inerziale $(0, x_1, x_2, x_3)$.
Le forze attive sono costituite dal peso (x_2 è verticale ascendente) e da una forza elastica dovuta ad una molla di lunghezza naturale nulla che collega A con G (baricentro del disco). Scrivere le equazioni di Lagrange assumendo le coordinate lagrangiane come in figura.

$$T = T_S + T_D$$

e quindi

$$T = \frac{ml^2}{6}\dot{q}_1^2 + \frac{3}{4}M\dot{q}_2^2 \,.$$

Il potenziale del peso si riduce a quello della sbarra dato che, per il disco, $x_2^{cor} = R = \text{cost}$, ovvero

$$U_p = -mg\frac{l}{2}\sin q_1 \,.$$

Il potenziale della forza elastica è

$$U_e = -\frac{h}{2}|AG|^2 = -\frac{h}{2}\Big[(l\cos q_1 - q_2)^2 + (l\sin q_1 - R)^2\Big]$$

e quindi, tralasciando costanti inessenziali,

$$U_e = \frac{h}{2}\Big[-q_2^2 + 2lq_2\cos q_1 + 2lR\sin q_1\Big] \,.$$

Le equazioni di Lagrange sono quindi

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U_e}{\partial q_1} + \frac{\partial U_p}{\partial q_1} \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial U_e}{\partial q_2} + \frac{\partial U_p}{\partial q_2} \end{cases}$$

ovvero

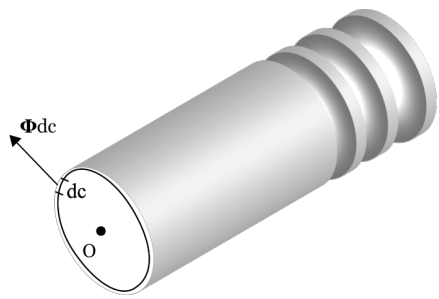
$$\begin{cases} \frac{ml^2}{3}\ddot{q}_1 = -hlq_2 \sin q_1 + hlR\cos q_1 - mg\frac{l}{2}\cos q_1 \\ \\ \frac{3}{2}M\ddot{q}_2 = -hq_2 + hl\cos q_1 \end{cases}$$

Esercizio

Nell'Esempio 2 si pensi il riferimento rotante intorno all'asse x_2 con velocità angolare costante: confrontare i due casi.

Esercizio

Ripercorrere l'esemplificazione del vincolo liscio della sbarretta riportata in figura.



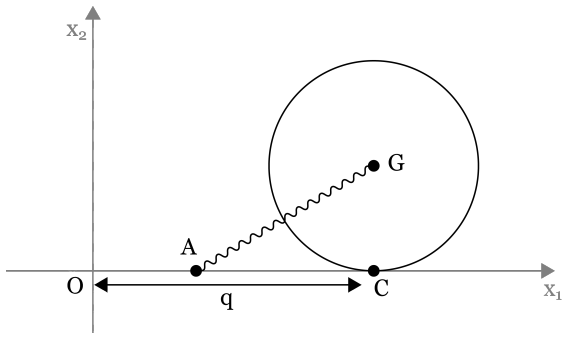
La risultante dei $\vec{\phi}dC$ (la retta d'azione passa per 0) è un vettore $\vec{\phi}_0$ applicato in O, mentre si ha $\mathbf{M}_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{v})} = \mathbf{0}$. Ne viene

$$\delta L^{(v)} = \vec{\phi}_0 \times \delta 0 + \mathbf{M}_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{v})} \times \delta\vec{\psi} = 0\,.$$

5.1.3 Esempio 3

Un disco omogeneo di raggio R e massa m è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse x_1 mantenendosi sul piano $(0, x_1, x_2)$, dove x_2 è verticale

e ascendente. Oltre al peso agisce una forza elastica dovuta ad una molla di lunghezza naturale nulla, di costante elastica $h > 0$ e di estremi A e G (centro del disco). Le coordinate di A sono $(\alpha \cos \beta t, 0)$, con α e β costanti.



1. Trovare il moto del disco assumendo come coordinata lagrangiana la coordinata $x_C^1 = q$ [poiché $q(0) = q_0, \dot{q}(0) = 0$].

2. Determinare la reazione vincolare in C mostrando che il vincolo di puro rotolamento non è liscio, pur essendo ideale.

$$T = \frac{3}{4} m \dot{q}^2 \,.$$

Il potenziale del peso è costante, mentre la forza elastica agente sul disco non è posizionale — in quanto dipendente dal tempo — ed occorre quindi trovarne la componente lagrangiana

$$\mathbf{f_e} = -h\, AG = -h \Big[(q - \alpha \cos \beta t) \mathbf{c_1} + R \mathbf{c_2} \Big]$$

che agisce sul solo punto G, cioé

$$\delta L = Q \delta q = \mathbf{f_e} \times \delta G = \mathbf{f_e} \times \delta q \mathbf{c_1}$$

e

$$Q = -h(q - \alpha \cos \beta t) \,.$$

L'equazione di Lagrange — unica, perché il sistema è ad un sollo grado di libertà — è

$$\frac{3}{2} \sin \ddot{q} + hq = h\alpha \cos \beta t \,, \tag{5.17}$$

ovvero

$$\ddot{q} + \frac{2h}{3m} q = \frac{2h\alpha}{3m} \cos \beta t$$

il cui integrale generale è del tipo

$$q = c_1 \cos \sqrt{\frac{2h}{3m}} t + c_2 \sin \sqrt{\frac{2h}{3m}} t + \varphi(t)\,,$$

con φ integrale particolare dell'equazione. Tale integrale deve ricercarsi in forma diversa a seconda che $\beta^2 = 2h/3m$ oppure $\beta^2 \neq 2h/3m$.
In quest'ultimo caso ricerchiamo un integrale particolare del tipo

$$\varphi(t) = A \cos \beta t + B \sin \beta t$$

mentre, nel primo caso, l'equazione di Lagrange è

$$\ddot{q} + \beta^2 q = 2 \frac{h\alpha}{3m} \cos \beta t\,,$$

che rappresenta il **caso della risonanza**: in questo caso l'integrale particolare deve cercarsi nella forma

$$\varphi(t) = t(A \cos \beta t + B \sin \beta t)\,.$$

Con le condizioni iniziali assegnate $(q(0) = q_0 > 0, \dot{q}(0) = 0)$ si trova

$$q = q_0 \cos \beta t + \frac{h\alpha}{3m\beta} \sin \beta t \qquad \text{con } \beta = \sqrt{\frac{2h}{3m}}\,.$$

Determiniamo la reazione del vincolo: il teorema del moto del baricentro applicato al sistema fornisce

$$m\,\mathbf{a_G} = \mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{R}^{(e,attive)} + \vec{\phi}\,,$$

dove $\mathbf{a_G}$ è nota da $\mathbf{a_G} = \ddot{q}\mathbf{c_1}$, pertanto l'equazione diviene

$$m\ddot{q}\mathbf{c_1} = -mg\mathbf{c_2} + \mathbf{f_e} + \vec{\phi}\,.$$

Introducendo l'espressione di $\mathbf{f_e}$ (forza elastica), e proiettando sugli assi, si trova

$$\begin{cases} m\ddot{q} = -h(q - \alpha \cos \beta t) + \phi_{x_1} \\ 0 = -mg - Rh + \phi_{x_2} \\ 0 = \phi_{x_3} \end{cases}$$

dove la componente $\phi_{x_1} = \ddot{q} + hq - h\alpha \cos \beta t$ è non nulla ed infatti, dall'equazione di Lagrange 5.17, segue $\phi_{x_1} = -\frac{m\ddot{q}}{2} \neq 0$.

5.2 Generalizzazione del concetto di potenziale. Sistemi classici (o naturali).

Le equazioni di Lagrange dedotte nella precedente sezione per un sistema olonomo a vincoli ideali sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \qquad \text{con } h = 1, ..., N. \tag{5.18}$$

Consideriamo ora vincoli (e forza) anche dipendenti dal tempo: diremo che il *sistema* è *potenziale* se esiste una funzione differenziabile $U(q_1, ..., q_N, t)$ tale che, per le componenti lagrangiane della sollecitazione, risulti

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad \text{con } h = 1, ..., N. \tag{5.19}$$

In tal caso $U(q, t)$ si dice **potenziale**. Posto

$$L = T + U\,, \tag{5.20}$$

ovvero la funzione di Lagrange (o Lagrangiano) del sistema, le equazioni 5.18 possono porsi nella forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,. \tag{5.21}$$

Se la sollecitazione è conservativa, è noto che il sistema è potenziale.

Esistono casi significativi più generali in cui le componenti Q_h lagrangiane della sollecitazione consentono che le equazioni 5.18 possano porsi nella forma compatta 5.21. Occorre — e basta — che esista una funzione $V(q, \dot{q}, t)$ tale che risulti

$$Q_h = \frac{\partial V}{\partial q_h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h}\,. \tag{5.22}$$

E' infatti subito verificabile che, posto

$$L = T = T + V \tag{5.23}$$

(da dirsi ancora Lagrangiano del sistema), le equazioni 5.18 assumono la forma 5.20. In tal caso $V(q, \dot{q}, t)$ si definisce **potenziale generalizzato**.

Si osservi però che, volendo rimanere nel quadro della meccanica classica, occorre escludere sollecitazioni (forze) che *dipendono* dall'accelerazione. Esplicitiamo allora la 5.22:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = \sum_1^N \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \sum_1^N \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_h \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_h \partial t}$$

dove si nota che, per fa sì che le Q_h non dipendano dalle $\ddot{q}$, è necessario assumere

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} = 0 \qquad \forall h, k$$

cioé che V sia lineare nelle $\dot{q}$.
Diremo allora sistemi **naturali** o **classici** i sistemi che ammettono potenziale, anche generalizzato, ma, in tal caso, del tipo

$$V(q, \dot{q}, t) = \sum_1^N \alpha_h(q, t)\dot{q}_h + V_0(q, t) \tag{5.24}$$

ovvero lineare nelle $\dot{q}$. In termini più sintetici si scriverà che l'eventuale potenziale generalizzato di un sistema classico potrà essere scritto nella forma

$$V(q, \dot{q}, t) = V_1 + V_0\,, \tag{5.25}$$

intendendo con V_1 una funzione lineare nelle $\dot{q}$ e con V_0 una funzione indipendente dalle $\dot{q}$. La *struttura* della funzione di Lagrange per sistemi classici è quindi del tipo

$$L = T + U + V\,.$$

Nel caso generale, quello cioè di vincoli dipendenti dal tempo, è noto che

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \qquad ^2$$

da cui consegue che in generale, per un sistema classico,

$$L = T_2 + (T_1 + V_1) + (T_0 + U + V_0)\,. \tag{5.26}$$

Quindi, sinteticamente,

$$L = L_2 + L_1 + L_0\,, \tag{5.27}$$

[2] Si ricordi che $T = \frac{1}{2}\sum_1^N a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k + \sum_1^N b_h\dot{q}_h + d\,.$

dove $L_2 = T_2$ è una forma quadratica[3] nelle $\dot{q}$, L_1 è lineare nelle $\dot{q}$ e infine L_0 non dipende dalle $\dot{q}$.
Naturalmente, se il sistema è semplicemente potenziale, e quindi $V = 0$, la 5.26 si riduce alla

$$L = T_2 + T_1 + (T_0 + U)\,. \tag{5.28}$$

5.2.1 Esempio: potenziale della forza di Coriolis

Un esempio di potenziale generalizzato è il seguente. Sia P un punto di massa m associato ad un sistema di riferimento $(0, x_1, x_2, x_3)$ non inerziale e rotante intorno ad un asse passante per O e con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante. Il punto sia soggetto alla forza di Coriolis

$$\mathbf{F} = -2m\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}\ :$$

si può dimostrare che esso ammette il potenziale generalizzato

$$V = m\mathbf{v}\dot{(}\vec{\omega} \wedge OP)\,. \tag{5.29}$$

Per brevità lo dimostreremo nel caso particolare in cui sia $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, ovvero che ruoti intorno all'asse x_3.
Come già noto, le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono

$$Q_1 = 2m\omega\dot{x}_2\,, \qquad Q_2 = -2m\omega\dot{x}_1\,, \qquad Q_3 = 0$$

e quindi

$$V = m\mathbf{v} \cdot \vec{\omega} \wedge OP = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = -m\omega\dot{x}_1 x_2 + m\omega\dot{x}_2 x_1$$

E' facile verificare che

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_1} = Q_1 = 2m\omega\dot{x}_2 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_2} = Q_2 = -2m\omega\dot{x}_1 \\ Q_3 = 0\,. \end{cases}$$

quindi, in base a 5.22, V è potenziale generalizzato della forza di Coriolis.

[3]Definita positiva, si ricordi quanto detto nel *Osservazione* del Paragrafo 4.1.

Esercizio

Una carica in moto in un campo elettromagnetico subisce la forza di Lorentz $\mathbf{F_L} = e\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}$: si supponga $\mathbf{H}$ costante e si trovi il potenziale generalizzato.

5.2.2 Osservazione

Le equazioni di Lagrange 5.18 (o 5.21) per un sistema classico sono riportabili a forma **normale**. Infatti, sviluppando 5.18, si ottiene in generale

$$\sum_1^N a_{hk}\ddot{q}_k + P_h(q, \dot{q}, t) = Q_h(q, \dot{q}, t) \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,.$$

Ricordando che $\det[a_{hk}] \neq 0$ e che, più precisamente, esso è maggiore di zero (vedi nota a piè di pagina della sezione 5.2), risolvendo con la regola di Cramer si ottiene

$$\ddot{q}_i = \phi_i(q, \dot{q}, t) \qquad \text{con } i = 1, ..., N$$

che è proprio il sistema 5.18 in forma normale.

Si osservi infine che le equazioni 5.21 relative alla lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, equivalgono alle equazioni relative alla lagrangiana

$$L' = KL(q, \dot{q}, t)\,,$$

dove k è una costante diversa da zero.
Come si verifica subito ricordando che

$$\frac{dF}{dt} = \sum_1^N \frac{\partial F}{\partial q_k}\,\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t}\,,$$

l'equivalenza sussiste anche nel caso $L' = L + \frac{dF}{dt}$, con $F(q, t)$.

Esercizio

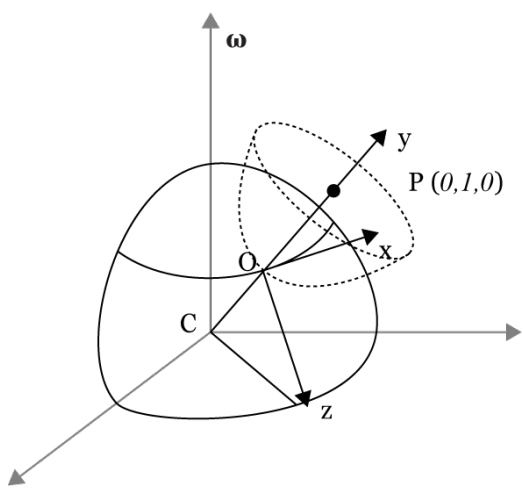
Fare ipotesi sulle funzioni coinvolte nelle equazioni di Lagrange affinché sia applicabile un teorema di esistenza e unicità noto allo studente.

5.2.3 Il pendolo di Foucault

E' noto[4] che le forze di Coriolis derivano da un potenziale generalizzato

$$V = m\mathbf{v} \cdot (\vec{\omega} \wedge OP)\,. \tag{5.30}$$

Con il nome **pendolo di Foucalt** si intende un pendolo di lunghezza l — con l "grande" rispetto alla dimensione dell'elongazione — che potremmo pensare di realizzare mediante una superficie sferica liscia su cui si muova liberamente un punto di massa m. Come noto dai corsi di Fisica, in un riferimento solidale alla Terra l'esperienza di Foucault (1851) mostrò che il piano dell'oscillazione *non* è costante, bensì ruota intorno alla verticale. La velocità di tale rotazione varia con la latitudine: ad una latitudine di 45° il periodo di rotazione è di $1,414$ giorni, al polo è di un giorno esatto e, infine, all'equatore non si manifesta alcuna rotazione.
Approfittando del fatto che $\omega \approx 7,27 \times 10^{-5}\text{sec}^{-1}$ è piccola, e pertanto il suo quadrato trascurabile, nel seguito verrà usata qualche approssimazione. Penseremo infatti di trascurare gli effetti centrifughi conglobandoli nella forza di gravità $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ che, con buona approssimazione[5], penseremo diretta verso il centro della Terra. Assumeremo inoltre gli assi come rappresentato in figura, dove la sfera che realizza il vincolo avrà centro $(0, 1, 0)$ e raggio 1.



[4]Vedi 5.29.
[5]Non più di $0,2°$ rispetto alla verticale.

Supponiamo ora di trovarci alla latitudine ϵ dell'emisfero Nord: l'equazione del vincolo sarà

$$x^2 + z^2 + (y - l)^2 = l^2 \,.$$

Se le oscillazioni sono piccole, il quadrato di y può essere trascurato e sarà lecito assumere per il vincolo l'equazione approssimata

$$y = \frac{1}{2l}(x^2 + z^2) \,.$$

Per la stessa semplificazione possiamo assumere il lagrangiano

$$L = T + U + V = \frac{1}{2}mv^2 - mgy + m\mathbf{v}(\vec{\omega} \wedge OP)$$

e, trascurando $\omega_z \dot{y}$ e $\omega_z y$, ottenere[6]

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{z}) - \frac{m}{2l}g(x^2 + z^2) + \omega_y(z\dot{x} - \dot{z}x)m \,.$$

In definitiva, le equazioni di Lagrange per questo sistema sono

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_y \dot{z} + \frac{g}{l}x = 0 \\ \ddot{z} - 2\omega_y \dot{x} + \frac{g}{l}z = 0 \end{cases} .$$

Moltiplicando la prima per i e sommando si ottiene

$$\ddot{z} + i\ddot{x} + 2\omega_y(i\dot{z} - \dot{x}) + \frac{g}{l}(z + ix) = 0$$

e quindi, posto $u = z + ix$, si ha

$$\ddot{u} + 2\omega_y i\dot{u} + \frac{g}{l}u = 0 \,,$$

lineare nella variabile $u = z + ix$. Il metodo di soluzione è sempre il solito dell'equazione caratteristica, le cui radici sono

$$-i\omega_y \pm i\sqrt{\omega_y^2 + \frac{g}{l}} \,,$$

che potremmo approssimare[7] con

$$-i\omega_y \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} \,.$$

[6] $\omega_z \dot{y} = -\omega(\cos\epsilon)\dot{y}$, dove ω e $\dot{y}$ sono "piccoli"; idem per $\omega_z y$.
[7] $\omega^2 \approx 0$.

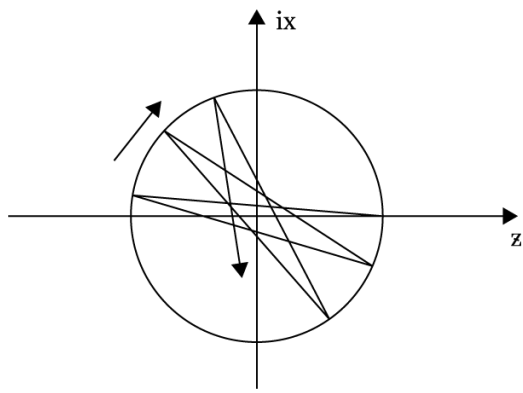
L'integrale generale è allora

$$u = e^{-i\omega_y t}\left(c_1 e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right)$$

e, considerate le condizioni iniziali $x_0 = 0$, $z_0 > 0$ e $\dot{x}_0 = \dot{z}_0 = 0$, si arriva facilmente a

$$u = z_0 e^{-i\omega_y t}\left[\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + i\frac{\omega_y}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t\right].$$

Ricordando che $u = z + ix$, possiamo allora "leggere" il moto del piano di un'oscillazione del pendolo sul piano complesso, così come rappresentato in figura.



E' del tutto ovvio che un osservatore inerziale vedrebbe il piano del pendolo perfettamente immobile!
Inoltre, osservando che $\omega_y = \omega \sin\epsilon$, si deduce che l'effetto sarà nullo all'equatore, in movimento in senso orario nell'emisfero Nord[8] ed in senso antiorario nell'emisfero Sud. Infatti, posto $\mathcal{T} = 2\pi/\sqrt{\frac{g}{l}}$ si ha che negli istanti $\frac{1}{2}\mathcal{T}, \mathcal{T}, \frac{3}{2}\mathcal{T}, ..., \frac{k}{2}\mathcal{T}$ il pendolo raggiungerà la massima elogazione, ovvero

$$|u|\left(\frac{k}{2}\mathcal{T}\right) = z_0\,.$$

Ricordando infine le espressioni di u, *in questi istanti* risulta

$$u = z + ix = z_0 e^{-i\omega_y t} = z_0\cos(-\omega_y t) + z_0 i\sin(-\omega_y t)\,,$$

[8] $\sin\epsilon > 0$.

posizioni che si trovano sulla circonferenza

$$\begin{cases} z = z_0 \cos(-\omega_y t) \\ x = z_0 \sin(-\omega_y t) \end{cases}$$

che è orientanta in senso orario quando $\omega_y = \omega \sin\epsilon > 0$ (emisfero Nord), in senso antiorario quando $\omega_y = \omega \sin\epsilon < 0$ (emisfero Sud).
Il periodo di una rotazione completa del piano del moto del pendolo è quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega_y} = \frac{2\pi}{\omega \sin\epsilon}\,.$$

Poiché il periodo di rotazione terrestre è $2\pi/\omega$, ovvero un giorno,

$$T = \frac{1}{\sin\epsilon} \text{ giorni}\,.$$

Se $\epsilon = 45°$, $T = 1.414$ giorni; se $\epsilon = \pi/2$ (polo), $T = 1$ giorno; se $\epsilon = 0$ (equatore), $T = \infty$ e non si avrà alcuna rotazione del piano del moto.

5.3 Equazioni di Lagrange generalizzate. Invarianza.

Sebbene nella prima parte di questo testo continueremo a trattare prevalentemente sistemi classici (o naturali), conviene tuttavia anticipare che lo studio delle equazioni di Lagrange può essere sviluppato più in generale superando la genesi meccanico-classica che ci ha condotto ad esse. La teoria, cioè, può riguardare anche sistemi di equazioni del tipo 5.21, ossia

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,, \tag{5.31}$$

in cui la sola condizione è che l'Hessiano relativo alle $\dot{q}$ di $L(q, \dot{q}, t)$ risulti

$$\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right] \neq 0\,. \tag{5.32}$$

Il sistema di equazioni 5.31 può così riferirsi all'*evoluzione* nel tempo di un *sistema* individuato dai parametri $q_1, ..., q_N$ non coincidente con un sistema meccanico.
Si osservi che il sistema 5.31 è comunque riducibile a forma normale in virtù della condizione 5.32.

Il sistema 5.31 si dice **sistema di Lagrange generalizzato** e presenta un'importante proprietà di **invarianza**.
Sia

$$q_h = q_h(Q_1, ..., Q_N) \qquad \text{con } h = 1, ..., N \tag{5.33}$$

una trasformazione invertibile di classe almeno C^2 e tale che ovunque sia

$$\frac{\partial(q_1, ..., q_N)}{\partial(Q_1, ..., Q_N)} \neq 0\,. \tag{5.34}$$

Sia l'inversa di 5.33 la

$$Q_h = Q_h(q_1, ..., q_N)\,. \tag{5.35}$$

Si vuole provare l'*invarianza in forma* di 5.31: più precisamente si vuole dimostrare che, posta la lagrangiana trasformata

$$\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) = L\left(q_h(Q), \sum_1^N \frac{\partial q_k}{\partial Q_h}\dot{Q}_h, t\right),$$

allora

$$\left(q_1(t), q_2(t), ..., q_N(t)\right) \tag{5.36}$$

è soluzione di 5.31 se e solo se

$$\left(Q_1(t), Q_2(t), ..., Q_N(t)\right)$$

(ottenuta da 5.35 mediante sostituzione delle $q_h(t)$ date dalla 5.36) è soluzione del sistema

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_h} = 0 \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,.$$

Infatti[9]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial q_k}{\partial Q_h}\right] = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial q_k}{\partial Q_h} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_h \partial Q_i}\dot{Q}_i$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_h} = \frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial Q_h} + \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_i \partial Q_h}\dot{Q}_i\,,$$

quindi, sostituendo, si ha[10]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_h} = \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right]\frac{\partial q_k}{\partial Q_h}\,. \qquad \text{cvd.}$$

[9] Per brevità si omette la sommatoria: $\sum \alpha_h \beta_h = \alpha_h \beta_h$
[10] Si ricordi il teorema di Swarz

5.4 Funzione Hamiltoniana. Integrale dell'energia.

Dato un sistema lagrangiano generalizzato, si dice **funzione Hamiltoniana**

$$H(q,\dot{q},t) = \sum_1^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_h - L\,. \tag{5.37}$$

Derivando totalmente si ha

$$\frac{dH}{dt} = \sum_1^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\ddot{q}_h + \sum_1^N \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - \frac{d}{dt}L\,,$$

dove

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_1^N \frac{\partial L}{\partial q_h}\dot{q}_h + \sum_1^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\ddot{q}_h\,,$$

da cui segue che

$$\frac{dH}{dt} = \sum_1^N \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h}\right)\dot{q}_h - \frac{\partial L}{\partial t}\,.$$

Si ha quindi, lungo ogni soluzione del sistema di Lagrange 5.31,

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}\,. \tag{5.38}$$

E' quindi evidente che, se $\partial L/\partial t = 0$, cioè se L non dipende dal tempo, si ha

$$H = \text{ cost}$$

e quindi H è un *integrale primo* del sistema 5.31 e si dice **integrale generalizzato dell'energia**.
Naturalmente, se 5.31 è generico, H è una funzione che può non aver nulla a che fare con il concetto di energia. Si osservi però che, anche se il sistema 5.31 si riferisce ad un sistema meccanico classico dotato di potenziale $U(q,t)$[11], si ha

$$H = T - U$$

solo nel caso in cui i vincoli siano fissi (o il sistema libero). Infatti, in riferimento a 5.27 e 5.37,

$$H = \sum_1^N \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}(L_2 + L_1 + L_0)\dot{q}_h - (L_2 + L_1 + L_0)\,, \tag{5.39}$$

[11] Si esclude il potenziale generalizzato.

dove L_2 e L_1 sono forme — rispettivamente — quadratica e lineare nelle $\dot{q}$.
Per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee risulta

$$\sum_1^N \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = 2L_2$$

$$\sum_1^N \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = L_1 \, ;$$

da 5.39 segue allora

$$H = 2L_2 + L_1 - L_2 - L_1 - L_0$$

e quindi

$$H = L_2 - L_0 \qquad (\neq E) \, . \tag{5.40}$$

Nel caso dei sistemi potenziali ($L_2 = T_2$, $L_0 = T_0 + U$), da 5.40 viene

$$H = T_2 - T_0 - U$$

che, in generale, è l'energia soltanto se i vincoli sono fissi. In tal caso infatti $T_2 = T$ ($T_1 = T_0 = 0$) e risulta

$$H = T - U = E \, . \tag{5.41}$$

L'integrale dell'energia — generalizzato o meno — è un esempio di integrale primo. Vale la pena di richiamare la definizione generale di integrale primo per un sistema del tipo 5.31 ovvero, posto in forma normale, del tipo

$$\ddot{q}_h = \phi_h(q, \dot{q}, t) \qquad \text{con } h = 1, ..., N \, . \tag{5.42}$$

Si dice che la funzione $f(q, \dot{q}, t)$ è integrale primo del sistema 5.42 se, per ogni soluzione $q_h(t) = [q_1(t), ..., q_N(t)]$, risulta

$$f\Big[q_h(t), \dot{q}_h(t), t\Big] = \text{ cost}$$

dove, ovviamente, il valore della costante dipende dalla soluzione. Se $q_h^0, \dot{q}_h^0$ sono le condizioni iniziali per $t = t_0$,

$$f\Big[q_h(t), \dot{q}_h(t), t\Big] = f(q_h^0, \dot{q}_h^0, t_0) \, .$$

5.5 Variabili ignorabili (o cicliche)

Riferendoci al sistema generalizzato 5.31 si supponga che risulti per qualche α

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0\,, \tag{5.43}$$

vale a dire che L non dipende dalla coordinata q_α e pertanto si dice essere una coordinata **ignorabile** o **ciclica**.
E' evidente che ad ogni coordinata ignorabile corrisponde un integrale primo del sistema: da 5.31 infatti, se vale 5.43, risulta

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = c_\alpha = \text{ cost}\,. \tag{5.44}$$

Il motivo della denominazione "ignorabile" risulterà chiaro dal seguente ragionamento: sia (per fissare le idee)

$$\frac{\partial L}{\partial q_N} = 0\,;$$

questo implica che

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} = c_N\,.$$

Quest'ultima equazione è esplicitabile rispetto a $\dot{q}_N$ (vedi 5.32) e si ha

$$\dot{q}_N = \psi(q_1, ..., q_{N-1}, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_{N-1}, c_N, t)\,. \tag{5.45}$$

Mediante quest'ultima si può sostituire $\dot{q}_N$ nelle prime $(N-1)$ equazioni del sistema 5.31 — si tenga conto della riportabilità di 5.31 in forma normale — ottenendo

$$\ddot{q}_i = \phi_i(q_1, ..., q_{N-1}, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_{N-1}, c_N, t) \qquad \text{con } i = 1, ..., N-1\,.$$

Risolto tale sistema si può ricavare q_N da 5.45 mediante una quadratura. La presenza di una (o più) variabili ignorabili riduce il numero di equazioni da risolvere. Il motivo della ugualmente molto usata denominazione "ciclica" si vedrà in seguito.

5.6 Il teorema di Noether. Simmetrie e integrali primi.

Si è visto che se esiste una coordinata ignorabile — sia ancora q_N — sussiste l'integrale primo $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} = c_N$. Si osservi che l'indipendenza di L da q_N si può esprimere dicendo che L risulta *invariante* se al sistema di coordinate q_h sostituiamo il sistema di coordinate Q_i così definito:

$$\begin{cases} Q_i = q_i \qquad \text{con } i = 1, ..., N-1 \\ \\ Q_N = q_N + \alpha \quad . \end{cases} \tag{5.46}$$

Infatti, poiché risulta $\dot{Q}_N = \dot{q}_N$, e q_N non compare in L, è evidente che

$$L(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t)\,,$$

ovvero L è invariante per la trasformazione 5.46 dipendente dal parametro α.
Questa è una particolare conseguenza di un teorema generale che associa l'invarianza di L, rispetto ad una trasformazione del tipo

$$Q_h = Q_h(q, \alpha) \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,, \tag{5.47}$$

all'esistenza di un integrale primo.
Precisamente vale il seguente teorema:

Teorema 5.1 (Teorema di Noether)

$$I = \sum_1^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial Q_h}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \tag{5.48}$$

è un integrale primo del sistema 5.31 se:

1. *la trasformazione 5.47 è invertibile di classe almeno C' e differenziabile rispetto ad α almeno in un intorno di $\alpha = 0$;*
2. $L(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t)$;
3. $Q_h^0 = Q_h(q, 0) = q_h \qquad$ *con* $h = 1, ..., N$.

Si omette la dimostrazione.

Naturalmente, se esistono più trasformazioni

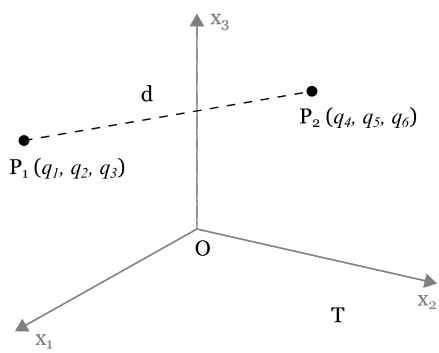
$$Q_h = Q_h(q, \alpha_i) \qquad \text{con } i = 1, ..., m \tag{5.49}$$

che lasciano invariante L, e ferme le ipotesi del teorema precedente, a ciascuna delle 5.49 corrisponde l'integrale primo

$$I_i = \sum_1^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial Q_h}{\partial \alpha_i}\bigg|_\alpha = 0 \qquad \text{con } i = 1, ..., m\,. \tag{5.50}$$

5.6.1 Conservazione della quantità di moto

Proviamo come la conservazione della quantità di moto per un sistema isolato possa dedursi dalle simmetrie del lagrangiano L.
Per semplicità si assuma, riferito alla terna inerziale T, un sistema formato da *due soli* punti $P_1(q_1, q_2, q_3)$ e $P_2(q_4, q_5, q_6)$ isolati e sui cui agiscano forze che dipendano solo dalla reciproca distanza P_1P_2.



Il lagrangiano L è

$$L = T+U = \frac{1}{2}m_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{q}_4^2+\dot{q}_5^2+\dot{q}_6^2)+U\left[(q_1-q_4)^2+(q_2-q_5)^2+(q_3-q_6)^2\right].$$

Posto

$$\begin{cases} Q_1 = q_1 + \alpha_1 \\ Q_i = q_i \qquad \text{con } i = 2, 3, 5, 6 \\ \\ Q_4 = q_4 + \alpha_1 \end{cases}$$

dal teorema di Noether risulta che sussiste l'integrale primo

$$I_1 = m_1\dot{q}_1 + m_2\dot{q}_4 = \text{ cost}\,.$$

Procedendo in modo analogo per q_2 e q_5 [12] si ha

$$I_2 = m_2\dot{q}_2 + m_2\dot{q}_5 = \text{ cost}$$

e, nello stesso modo, per le terze coordinate q_3 e q_6 si ha

$$I_3 = m_1\dot{q}_3 + m_2\dot{q}_6 = \text{ cost}\,.$$

Ne viene che è costante il vettore

$$(m_1\dot{q}_1 + m_2\dot{q}_4)\mathbf{c_1} + (m_1\dot{q}_2 + m_2\dot{q}_5)\mathbf{c_2} + (m_1\dot{q}_3 + m_2\dot{q}_6)\mathbf{c_3} = \textbf{ cost}$$

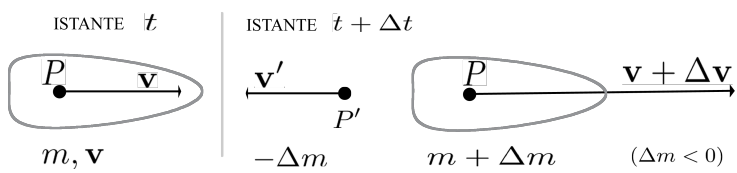
e quindi risulta che la quantità di moto è

$$\mathbf{Q} = m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2} = \textbf{ cost}\,.$$

Il risultato si generalizza facilmente ad un sistema $\{P_i\}_1^n$, con n qualsiasi[13].

5.6.2 Punto di massa variabile

Un punto *isolato* — che schematizza un razzo — emette[14] massa come riportato in figura.



All'istante t la quantità di moto è $\mathbf{Q}(t) = m\mathbf{v}$ mentre, all'istante $t+\Delta t$, vale

$$\mathbf{Q}(t + \Delta t) = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) - \Delta m\mathbf{v}'\,.$$

[12] Le seconde coordinate $Q_2 = q_2 + \alpha_2$, $Q_5 = q_5 + \alpha_2$, $Q_i = q_i$ con $i = 1, 3, 4, 6$

[13] Non sarebbe difficile verificare, mediante l'uso del teorema di Noether, la conservazione del momento della quantità di moto per un sistema isolato. Lo si dimostrerà come esercizio.

[14] Qui si suppone che l'emissione avvenga in modo *continuo*. Si pensi P' — all'istante $t + \Delta t$ — come il baricentro della massa emessa nel "tempuscolo" Δt e traslante nel riferimento.

Ne viene

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{Q} &= \mathbf{Q}(t+\Delta t)-\mathbf{Q}(t) = (m+\Delta m)(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) - \Delta m\mathbf{v}' - m\mathbf{v} \\ &= (m+\Delta m)\Delta\mathbf{v} - \Delta m(\mathbf{v}'-\mathbf{v})\end{aligned}$$

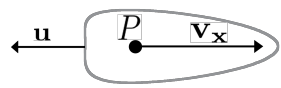
in cui chiameremo $\mathbf{u} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ la *velocità relativa* di P' rispetto a P (il razzo), ovvero la velocità del propellente, che considereremo costante. Risulta quindi

$$\frac{\Delta\mathbf{Q}}{\Delta t} = (m+\Delta m)\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} - \frac{\Delta m}{\Delta t}\mathbf{u}$$

e, passando al limite per $\Delta t \to 0$, risulta[15]

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\mathbf{u} = \mathbf{0}\,.$$

La situazione è riportata in figura.



Proiettando quindi sull'asse x si ha

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u\,.$$

Se $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v_0}$, integriamo

$$v(t) - v_0 = u\int_0^t -\frac{dm}{m} = u\,\log\frac{m(0)}{m(t)}$$

per trovare

$$v(t) = v_0 + u\log\frac{m(0)}{m(t)}\,.$$

Pensando

$$m(0) = m_A + m_C\,,$$

dove m_A è la massa dell'astronave e m_C la massa del propellente, la *velocità finale* — bruciato tutto il propellente — è

$$v_p = v_0 + u\log\left(1+\frac{m_C}{m_A}\right), \tag{5.51}$$

[15] Ricordando che $\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{0}$.

che dipende da v_0, u e $\frac{m_C}{m_A}$.
Si pensi $v_0 = 0$ (termine ovviamente importante per i razzi a più stadi), otterremo

$$v_p = u \log\left(1 + \frac{m_C}{m_A}\right).$$

Poiché anche con un notevole rapporto $\frac{m_C}{m_A}$ il logaritmo "cresce poco", v_p è dell'ordine di grandezza di u.

Un viaggio spaziale (impossibile)

Pensiamo a $u = 4300$m/s, già enorme per un razzo *chimico*. Si voglia spedire un'astronave di $m_A = 100.000$kg fino ad α-Centauri (~ 4.3 anni luce) in un tempo ragionevole, diciamo 1000 anni. Quanto carburante servirà al razzo?
Decidiamo di trascurare il (tutt'altro che trascurabile) *tempo di accelerazione* per raggiungere v_p, che dovrà essere

$$v_p = \frac{4.3}{1000} c$$

per coprire 4.3 anni luce in 1000 anni. Da 5.51 segue

$$v_p = \frac{4.3}{1000} c = 4300 \cdot \log \frac{m_0}{m_A} \qquad (m_0 = m_A + m_C)$$

e, con $c = 3 \times 10^8$m/s, viene

$$300 = \log \frac{m_0}{m_A}\,.$$

Passando in base[16] 10 si trova

$$\frac{300}{2.3} = \log_{10} \frac{m_0}{m_A} = 130\,,$$

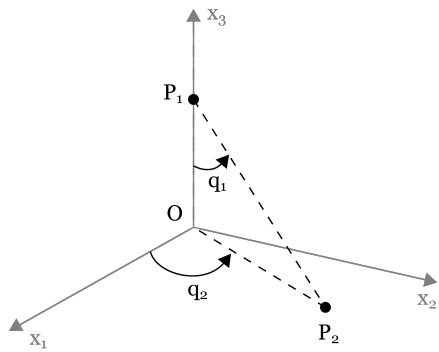
$$\frac{m_0}{m_A} = 10^{130} \text{ kg} \qquad \Rightarrow \qquad m_0 = 10^{135} \text{ kg } \cong m_C\,.$$

Esiste tanta massa nell'Universo conosciuto?
In base ai modelli noti, si provi a calcolare per esercizio la massa della Via Lattea ed il numero di galassie equivalenti a 10^{135}kg.

[16] $\log \alpha = 2.3 \cdot \log_{10} \alpha$

Esercizio

Si considerino due punti P_1 e P_2 di uguale massa m, il primo vincolato sull'asse x_3 e l'altro sul piano $(0, x_1, x_2)$ di un riferimento inerziale $(0, x_1, x_2, x_3)$. Essi sono collegati da una sbarretta rigida di massa trascurabile e di lunghezza l; i vincoli sono lisci e il peso è l'unica forza agente.



Si scrivano le equazioni di Lagrange e si verifichi che q_2 è ignorabile (o ciclica).

5.6.3 Osservazione

La denominazione "ciclica" per le coordinate ignorabili deriva dal fatto che, spesso, si tratta di angoli (come nel caso di q_2 dell'esercizio precedente) che possono compiere un *giro* o *ciclo* completo.

5.7 Un esempio di sistema non classico

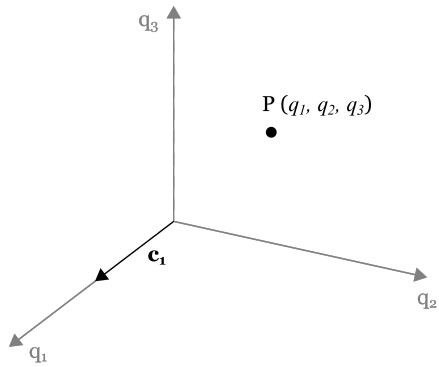
Un esempio significativo di lagrangiano per un sistema non classico è il seguente:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v}{c^2}} + U$$

ovvero

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}{c^2}} + U(q_1, q_2, q_3)\,. \tag{5.52}$$

Si tratta del lagrangiano di una particella relativistica di massa propria[17] m_0 soggetta ad una forza di potenziale U.



Le equazioni di Langrange

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\dot{q}_h}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\partial U}{\partial q_h} = 0 \qquad \text{con } h = 1, 2, 3$$

forniscono le equazioni relativistiche della particella, dove $v^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2$.

Se, ad esempio, la particella ha carica e ed è soggetta ad un campo elettrico costante $\mathbf{E} = E\mathbf{c_1}$, allora $U = eEq_1$. Le equazioni di Lagrange divengono allora

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{m_0\dot{q}_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = eE \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{m_0\dot{q}_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0 \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{m_0\dot{q}_3}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0 \ . \end{cases} \tag{5.53}$$

Date le condizioni iniziali $q_h(0) = 0$ e $\dot{q}_h(0) = 0$ (con $h = 1, 2, 3$), le ultime due equazioni forniscono $q_2 = q_3 = 0$, mentre la prima — che fornisce q_1 — diviene

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{q}_1/c}{\sqrt{1-\frac{\dot{q}_1^2}{c^2}}} = \frac{eE}{m_0 c} \, .$$

[17] Con il termine *massa propria* (o di riposo) si intende la massa misurata in un riferimento in cui la particella sia in quiete.

Integrando tra 0 e t ne segue

$$\frac{\dot{q}_1/c}{\sqrt{1-\frac{\dot{q}_1^2}{c^2}}} = \frac{eE}{m_0 c} t \tag{5.54}$$

e, posto $\alpha = \frac{m_0 c}{eE}$ e ricavando da 5.54 $\frac{\dot{q}_1}{c}$, si ottiene

$$\frac{\dot{q}_1}{c} = \frac{t/\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2}} \,. \tag{5.55}$$

Da 5.55 risulta evidente che

1. per $t \to +\infty$, $\dot{q}_1 \to c$ (a differenza del caso classico);
2. nel tempo $t^* = \alpha$, $\frac{\dot{q}_1}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $\dot{q}_1 = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Se, ad esempio, la particella è un elettrone, $E \approx 10^6 V/m$ e

$$\alpha = \frac{9.1 \times 10^{-31} \cdot 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \cdot 10^6} \approx 1.7 \times 10^{-9} \text{ s}$$

quindi, in un tempo brevissimo, l'elettrone raggiunge la velocità relativistica $\frac{c}{\sqrt{2}}$.
E' facile infine integrare la 5.55 e ottenere

$$q_1 = \alpha c \left[\sqrt{1+(t/\alpha)^2} - 1 \right].$$

5.7.1 Significato di H nel caso relativistico

Studiamo ora il significato di H per il sistema precedente:

$$H = \sum_1^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - L \,.$$

Dato $v^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2$ si ha

$$H = m_0 \sum_1^3 \frac{\dot{q}_h}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \dot{q}_h - \left(- m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + U \right)$$

cioé

$$H = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - U = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - U \,.$$

Dato che $\partial L/\partial t = 0$, H è integrale primo.
Posto

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(massa relativistica)}\,,$$

segue la ben nota espressione dell'energia relativistica:

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - U = mc^2 - U\,.$$

Supponendo $v \ll c$, ed esprimendo in serie binomiale

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \big[1 - \big(\frac{v}{c}\big)^2\big]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots\,,$$

segue che

$$H \cong m_0 c^2 \big(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - U\big) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 - U\,,$$

dove $m_0 c^2$ è l'*energia intrinseca* della particella.

Esercizio

Se $p = m_0 v/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ è la quantità di moto relativistica, e posto $H = E$, dimostrare la formula — spesso usata in Fisica — $E = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2 - U$.

5.8 Esercizio sul teorema di Noether

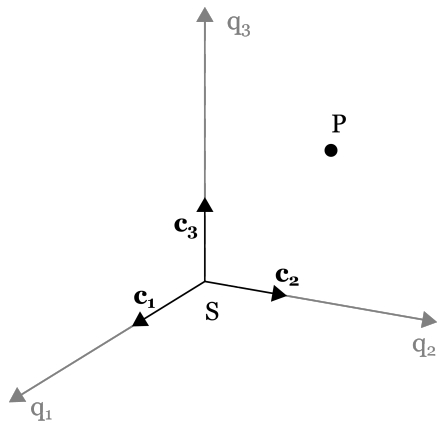
Nel problema dei due corpi che analizzeremo nel prossimo capitolo vale $SP \wedge \mathbf{v} = \mathbf{cost}$, il che equivale alla *conservazione del momento* della quantità di moto rispetto a S. Ciò può ottenersi direttamente dal lagrangiano[18]

$$L = \frac{1}{2} m^* (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + U\Big(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\Big)$$

[18] Dove m^* è la massa ridotta.

mediante il teorema di Noether: L è infatti simmetrico per rotazioni intorno agli assi.

Consideriamo una rotazione intorno a q_3



$$\begin{cases} Q_1 = q_1 \cos\alpha - q_2 \sin\alpha \\ Q_2 = q_1 \sin\alpha + q_2 \cos\alpha \\ Q_3 = q_3 \quad . \end{cases}$$

E' evidente che $L(Q, \dot{Q}) = L(q, \dot{q})$ e pertanto

$$I_1 = \sum_1^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial Q_h}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}$$

è integrale primo del sistema lagrangiano.
Dato che

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m^* \dot{q}_i \,, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = -q_2 \,, \qquad \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = q_1 \,, \qquad \frac{\partial Q_3}{\partial \alpha} = 0$$

segue allora

$$I_1 = m^*(-\dot{q}_1 q_2 + \dot{q}_2 q_1) = \text{ cost}\,.$$

Si osservi che

$$I_1 = m^* \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{vmatrix} = \mathbf{c_3}(SP \wedge m^* \mathbf{v}) = \text{cost}\,.$$

In modo analogo, considerando rotazioni intorno a q_2 e q_1,

$$\begin{cases} Q_1 = q_1 \cos\alpha - q_3 \sin\alpha \\ Q_2 = q_2 \\ Q_3 = q_1 \sin\alpha + q_3 \cos\alpha \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} Q_1 = q_1 \\ Q_2 = q_3 \sin\alpha + q_2 \cos\alpha \\ Q_3 = q_3 \cos\alpha - q_2 \sin\alpha \end{cases}$$

da cui si ottengono I_2 e I_3:

$$\begin{cases} I_2 = m^*(\dot{q}_1 q_3 - \dot{q}_3 q_1) = \mathbf{c_2}(SP \wedge m^*\mathbf{v}) = \text{ cost} \\ \\ I_3 = m^*(\dot{q}_2 q_3 - \dot{q}_3 q_2) = \mathbf{c_1}(SP \wedge m^*\mathbf{v}) = \text{ cost } . \end{cases}$$

Da questo segue che $(SP \wedge m^*\mathbf{v})$ è costante e sarà quindi costante anche il momento della quantità di moto rispetto a S. In particolare una conseguenza importante è che che **il moto avverrà su un piano** per S.

5.9 Complementi

5.9.1 Premessa

Torniamo ora ad un sistema olonomo generico a vincoli ideali. Abbiamo distinto — e trattato nei vari esempi — i seguenti casi:

1. **Forze conservative** (sistema conservativo)
   Le componenti lagrangiane e i vincoli fissi derivano da un potenziale $U(q)$ indipendente dal tempo tale che
   $$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,.$$

2. **Forze potenziali** (sistema potenziale)
   Le componenti lagrangiane e i vincoli dipendono anche dal tempo $(Q_h = Q_h(q,t))$ ed esiste $U(q,t)$ tale che
   $$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,.$$

3. Più in generale abbiamo considerato **potenziali generalizzati** per $Q_h = Q_h(q, \dot{q}, t)$ nel caso in cui esista $V(q, \dot{q}, t)$ tale che
   $$Q_h = \frac{\partial V}{\partial q_h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h}\,.$$

In tutti questi casi le equazioni di Lagrange — posto $L = T + V + U$ — si possono porre nella forma[19]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,.$$

5.9.2 Caso generale

Consideriamo ora il caso in cui le $Q_h(q, \dot{q}, t)$ riportino una parte della sollecitazione potenziale $U(q, t)$, ed un'altra con componenti $Q'_h(q, \dot{q}, t)$ non dipendenti da alcun potenziale, neppure generalizzato. In tal caso le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial q_h} + Q'_h\,. \tag{5.56}$$

Posto $E = T - U$, ci proponiamo di calcolarne la variazione

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{dU}{dt}\,. \tag{5.57}$$

Consideriamo anzitutto che

$$\frac{d}{dt}\sum_1^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h = \sum_1^N \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h + \sum_1^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\ddot{q}_h \tag{5.58}$$

e, quindi,

$$\sum_1^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\ddot{q}_h = \frac{d}{dt}\sum_1^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - \sum_1^N \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h\,.$$

Da 5.57 calcoliamo dapprima

$$\frac{dT}{dt} = \sum_1^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\ddot{q}_h + \sum_1^N \frac{\partial T}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial T}{\partial t}$$

e, tenendo conto di 5.58, otteniamo

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_1^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h + \sum_1^N \left(\frac{\partial T}{\partial q_h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\right)\dot{q}_h + \frac{\partial T}{\partial t}\,.$$

Da 5.56 segue

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_1^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - \sum_1^N \frac{\partial U}{\partial q_h}\dot{q}_h - \sum_1^N Q'_h\dot{q}_h + \frac{\partial T}{\partial t}\,.$$

[19] Sono "sistemi naturali" quelli in cui $V = V_1 + V_0$.

Si ricordi che nel caso generale vale $T = T_2 + T_1 + T_0$, ne viene

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_1^N \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}(T_2 + T_1 + T_0)\dot{q}_h - \sum_1^N \frac{\partial U}{\partial q_h}\dot{q}_h - \sum_1^N Q'_h \dot{q}_h + \frac{\partial T}{\partial t}\,. \quad (5.59)$$

Riprendendo il teorema di Eulero,

$$\sum_1^N \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h = 2T_2 \qquad \text{e} \qquad \sum_1^N \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h = T_1\,,$$

si trova che il primo addendo della 5.59 diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) &= 2\frac{d}{dt}(T_2 + T_1 + T_0) - \frac{d}{dt}(T_1 + T_0) \\ &= 2\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}(T_1 + T_0)\,. \end{aligned}$$

Possiamo quindi riscrivere la 5.59 come

$$\frac{dT}{dt} = 2\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}(T_1 + T_0) - \sum_1^N \frac{\partial U}{\partial q_h}\dot{q}_h - \sum_1^N Q'_h \dot{q}_h + \frac{\partial T}{\partial t}\,,$$

ovvero

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d(T_1 + T_0)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_1^N \frac{\partial U}{\partial q_h}\dot{q}_h + \sum_1^N Q'_h \dot{q}_h\,. \quad (5.60)$$

Per ottenere 5.57 basta sottrarre dalla relazione appena ricavata (5.60) la quantità

$$\frac{dU}{dt} = \sum_1^N \frac{\partial U}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial U}{\partial t}\,,$$

ottenendo infine

$$\frac{dE}{dt} = \sum_1^N Q'_h \dot{q}_h + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{d}{dt}(T_1 + T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.61)$$

che rappresenta la variazione dell'energia E per un generico sistema olonomo a vincoli ideali.

Discussione dei casi

- I vincoli non dipendono da t (sono fissi):

$$\frac{dE}{dt} = \sum_1^N Q'_h \dot{q}_h + \frac{\partial U}{\partial t} \,. \tag{5.62}$$

- Se anche U non dipende dal tempo:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_1^N Q'_h \dot{q}_h \tag{5.63}$$

ed è ovvio che, se $Q'_h = 0 \ \forall h$,

$$\frac{dE}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E = \text{cost.} \tag{5.64}$$

- C'è inoltre un secondo caso in cui, pur non essendo necessariamente $Q'_h = 0$, vale la 5.64: è il caso in cui

$$\sum_1^N Q'_h \dot{q}_h = 0 \,.$$

In questo caso le forze si dicono **giroscopiche**, o di **potenza nulla**[20].

- Se invece

$$\sum_1^N Q'_h \dot{q}_h \leq 0 \qquad \forall t \,,$$

le forze si dicono **dissipative** e

$$\frac{dE}{dt} \leq 0 \,.$$

Vedremo alcune conseguenze nella successiva discussione sulla stabilità dell'equilibrio e dei moti.

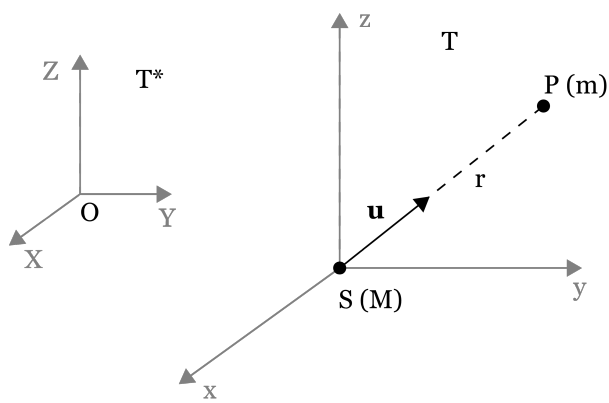
[20] Abbiamo visto il caso delle forze di Coriolis, che ne sono un esempio.

Capitolo 6

Problema dei due corpi

6.1 Equazioni di Lagrange

Consideriamo un sistema formato da due punti materiali S e P isolati[1]. Sia il sistema T^* un riferimento inerziale e T un riferimento avente origine nel punto S, di massa M, e con assi di direzione invariabile rispetto a T^*.



Si tratta di studiare il moto del punto P (di massa m) — o della sfera di centro P — rispetto al riferimento T.
Siano

$$\mathbf{r} = SP\,, \qquad \mathbf{u} = \text{vers}\mathbf{r}\,, \qquad r = ||SP||$$

[1] O, equivalentemente, da due *corpi* costituiti da distribuzioni sferiche omogenee di massa, in particolare due sfere omogenee.

e ipotizziamo che la forza esercitata da S su P sia

$$\mathbf{F} = F(r)\mathbf{u} \qquad \text{con } F(r) \in \mathcal{C}^k_{[0,l]}. \tag{6.1}$$

E' allora evidente che quando $F(r) > 0$, la forza è di natura repulsiva; mentre, per $F(r) < 0$, la forza è attrattiva.

Nel riferimento T agiscono anche forze apparenti che, tuttavia, si riducono alla sola forza di trascinamento[2]:

$$\mathbf{F}_\tau = -m\mathbf{a}_\tau\,. \tag{6.2}$$

L'accelerazione di trascinamento $\mathbf{a}_\tau$ è la stessa in ogni punto di T (moto traslatorio) e, in particolare,

$$\mathbf{a}_\tau = \mathbf{a}_S\,,$$

dove $\mathbf{a_s}$ è l'accelerazione del punto S rispetto a T^*.
Per il principio di azione e reazione, la forza che agisce su S è

$$\mathbf{F}' = -F(r)\mathbf{u}$$

pertanto, da $\mathbf{F}' = M\mathbf{a_s}$, segue

$$\mathbf{a_s} = \mathbf{a}_\tau = -\frac{F(r)}{M}\mathbf{u}\,.$$

In definitiva la forza di trascinamento è

$$F_\tau = \frac{m}{M}F(r)\mathbf{u}\,. \tag{6.3}$$

La forza complessiva agente su P è allora

$$F(r)\mathbf{u} + \frac{m}{M}F(r)\mathbf{u} = \left(\frac{M+m}{M}\right)F(r)\mathbf{u}\,, \tag{6.4}$$

e si tratta quindi di una *forza centrale* di centro S. Ne viene che il moto di P è *piano* ed avviene sul piano passante per S[3]. In altro modo, detta $\mathbf{a}$ l'accelerazione di P (in T), risulta

$$m\mathbf{a} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)F(r)\mathbf{u}$$

[2]La forza di Coriolis è nulla, essendo il moto di T traslatorio rispetto a T^*.
[3]Si veda il paragrafo 5.8 in cui si applica il teorema di Noether.

e quindi $SP \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$.
Infine, detta $\mathbf{v}$ la velocità di P, si osservi che

$$\frac{d}{dt}(SP \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + SP \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

e quindi

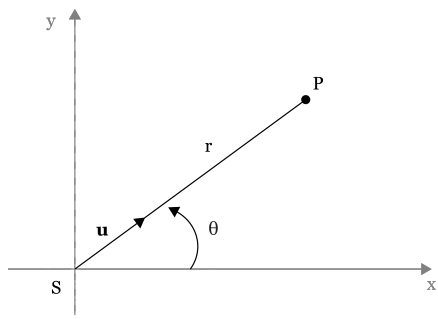
$$SP \wedge \mathbf{v} = \text{cost} = \mathbf{c}\,, \qquad \text{c.v.d.}$$

Ponendoci allora sul piano del moto — sia (S, xy) — e introdotte le coordinate polari (r, θ), da $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ si trova

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\,, \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

da cui segue che

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\,.$$



La forza centrale 6.4 è conservativa e il potenziale è

$$\frac{M+m}{M}\int F(r)dr\,. \tag{6.5}$$

Il lagrangiano $L' = T + U$ è

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{M+m}{M}\int F(r)dr \tag{6.6}$$

e, come è noto, può essere scelto a meno di costanti moltiplicative. Assumendo allora

$$L = \frac{M}{M+m}L'\,,$$

da 6.6 si ottiene

$$L = \frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \int F(r)dr$$

quindi, considerando $U(r) = \int F(r)dr$ (potenziale della 6.1, forza assoluta),

$$L = \frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r)\,. \tag{6.7}$$

Questo lagrangiano è quello del punto P — sollecitato da $F(r)\mathbf{u}$, di potenziale $U(r)$ in un riferimento *inerziale* — a patto di attribuirgli la massa fittizia

$$m^* = \frac{mM}{M+m}\,,$$

che si dice **massa ridotta**.

Per studiare il moto di P in T ci si può riferire alle equazioni di Lagrange relative al lagrangiano 6.7[4]: le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m^*\dot{r}) - m^* r\dot{\theta}^2 = \frac{\partial U}{\partial r} \\ \\ \frac{d}{dt}(m^* r^2\dot{\theta}) = 0\ . \end{cases} \tag{6.8}$$

Dalla seconda si ottiene allora

$$\dot{r}^2\dot{\theta} = c \tag{6.9}$$

che rappresenta l'**integrale delle aree** che, in questo caso, consegue dall'essere θ una coordinata ciclica.
Inoltre, senza per ora fare riferimento alla prima equazione del sistema 6.8, si osservi che $\partial L/\partial t = 0$ e che quindi vale l'integrale dell'energia:

$$\frac{1}{2}m^*(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}) - U(r) = E\,.$$

Eliminando $\dot{\theta}$ mediante la 6.9 si ha

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m^*}\Big[E + U(r)\Big] - \frac{c^2}{r^2} = \phi(r)\,, \tag{6.10}$$

ovvero un'equazione (del tipo di Weierstrass)

$$\dot{r}^2 = \phi(r)\,, \tag{6.11}$$

che consente di riportare il problema alle quadrature.

[4]Come si è detto, la semplice sostituzione della massa m^* alla massa m consente di trattare il problema come se T fosse inerziale (e P soggetto alla sola forza *assoluta* 6.1).

6.2 Equazione di Weierstrass

6.2.1 Premessa

Risulta di interesse analitico l'equazione differenziale

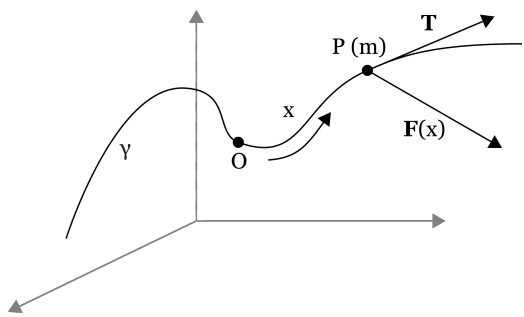
$$\ddot{x} = f(x) \tag{6.12}$$

da risolvere con le generiche condizioni iniziali, ovvero per $t = 0$:

$$x(0) = x_0 \in I\,, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0\,. \tag{6.13}$$

Per $k \geq 1$ l'ipotesi $f(x) \in C_I^k$ (con I l'intervallo) assicura condizioni di *esistenza* e *unicità*; ciò vale sicuramente in "piccolo" ma, allo stesso tempo, anche in "grande" qualora, ad esempio, df/dx sia almeno *continua* in I (chiuso e limitato).

L'equazione 6.12 appena vista si presenterà spesso in molti problemi di Meccanica, se ne vedrà qui un esempio.
Sia γ una guida curvilinea, regolare, liscia ed orientata. Introdotta una ascissa curvilinea x, sia $P(x)$ un punto di massa m vincolato su γ e soggetto ad una forza (posizionale) $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)$ e — almeno — continua.



Il lagrangiano è quindi

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(x)\,,$$

con $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{T}$ — dove $\mathbf{T}$ è un versore della tangente a γ — e

$$U(x) = \int \mathbf{F} \times \mathbf{T} dx = \int F_T(x) dx\,.$$

Ne deriva l'equazione di Lagrange[5] (appunto del tipo 6.12)

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F_T(x)\,.$$

Osservazione

Più in generale l'equazione 6.12 si presenta in *tutti* i problemi ad un grado di libertà e **conservativi**, così come in alcuni problemi a più gradi di libertà, in particolare nel problema dei due corpi.
Il problema sarà infatti riconducibile all'equazione

$$\ddot{r} = \frac{1}{m^*}\left(\frac{dU}{dr} + \frac{m^* c^2}{r^3}\right) = f(r)\,. \tag{6.14}$$

Tale problema verrà affrontato nei paragrafi successivi.

6.2.2 Equazione di Weierstrass

L'equazione 6.12 si dice **autonoma** in quanto non dipende esplicitamente dalla variabile t. Dovrebbe essere già noto dai corsi di Analisi un metodo risolutivo generale, vale a dire con condizioni iniziali generiche 6.13.
Ponendo

$$\dot{x} = u(x) \qquad \Rightarrow \qquad \left[\ddot{x} = \frac{du}{dx}\dot{x} = \frac{du}{dx}u\right], \tag{6.15}$$

dalla 6.12 segue

$$\frac{du}{dx}u = f(x)\,, \qquad \text{ovvero} \qquad udu = f(x)dx\,.$$

Integrando si ha

$$\frac{u^2}{2} = \int f(x)dx$$

che, ricordando la 6.15, fornisce

$$\dot{x}^2 = \int 2f(x)dx\,. \tag{6.16}$$

[5] Nei prossimi paragrafi si faranno numerosi riferimenti a questo esempio così da dare maggiore concretezza alla discussione dell'equazione 6.12.

Se $\psi(x)$ è una qualsiasi primitiva di $2f(x)$ in I, e cioè

$$\psi'(x) = 2f(x)\,, \tag{6.17}$$

da 6.16 risulta

$$\dot{x}^2 = \psi(x) + c\,. \tag{6.18}$$

Esprimendo c in funzione delle condizioni iniziali

$$c = \dot{x}_0^2 - \psi(x_o)\,,$$

la 6.18 diviene

$$\dot{x}^2 = \psi(x) - \psi(x_0) + \dot{x}_0^2\,.$$

Posto infine

$$\phi(x) = \psi(x) - \psi(x_0) + \dot{x}_0^2 \tag{6.19}$$

l'equazione 6.18 si può riscrivere come

$$\dot{x}^2 = \phi(x)\,, \tag{6.20}$$

che si suol dire **equazione di Weierstrass** associata all'equazione 6.12 con le condizioni iniziali 6.13.
La soluzione dell'equazione 6.20 — con $x(0) = x_0$ — conduce alla soluzione dell'equazione 6.12. Si osservi però che l'equazione 6.20 non è in *forma normale* e che, separando le variabili, ne risulterà evidente il rilievo degli zeri di $\phi(x)$.

Nel paragrafo seguente si dimostrerà che lo studio degli zeri di $\phi(x)$ consente (almeno) una discussione *qualitativa* dell'equazione 6.20 e, quindi, anche dell'equazione 6.12.
Preliminarmente, ricordando 6.17 e 6.18, segue

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{x}^2 - \psi(x)\right] = 2\dot{x}\left[\ddot{x} - f(x)\right]$$

e, poiché $\phi(x)$ e $\psi(x)$ differiscono per una costante,

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{x}^2 - \phi(x)\right] = 2\dot{x}\left[\ddot{x} - f(x)\right]. \tag{6.21}$$

Da 6.21 deriva subito che

1. se $x(t)$ è soluzione dell'equazione 6.12 — con le condizioni iniziali 6.13 — allora essa è soluzione anche dell'equazione di Weierstrass risultando

$$\dot{x}_0^2 = \phi(x_0)\,; \tag{6.22}$$

2. viceversa, se $x(t)$ è soluzione dell'equazione 6.20 — sempre per $x(0) = x_0$ — allora essa è soluzione della 6.12 con

$$x(0) = x_0 \qquad \text{e} \qquad \dot{x}_0 = \pm\sqrt{\phi(x_0)}\,. \tag{6.23}$$

Ciò vale (vedi anche 6.21) in ogni intervallo in cui $\dot{x} \neq 0$ ($\phi(x) \neq 0$), quindi il segno di 6.23_2 è determinato.

6.2.3 Discussione

Poiché qui interessano applicazioni fisiche, considereremo

$$\phi(x) \geq 0\,.$$

In tali applicazioni, infatti, $\dot{x}$ rappresenta una *velocità* — si pensi all'esempio del punto mobile sulla curva γ — ed è quindi una velocità non immaginaria (come verrebbe, in caso contrario, dall'equazione 6.20).
Supporremo inoltre[6] $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 > 0$: in tal caso l'equazione 6.20 può scriversi (in un intorno di x_0)

$$\dot{x} = \sqrt{\phi(x)}\,. \tag{6.24}$$

Discuteremo ora tutti i vari casi possibili.

Caso 1

Sia

- $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 > 0$;
- $\phi(x)$ priva di zeri per $x \geq x_0$.

Ciò corrisponde ad un grafico di $\phi(x)$ del tipo in figura.

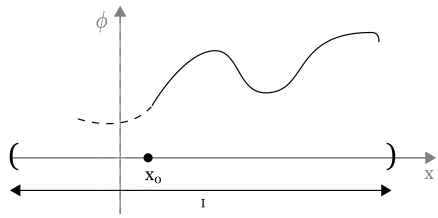
Da 6.24 segue — per separazione delle variabili —

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}}$$

[6] Non è limitativo. Infatti, se $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 < 0$, l'equazione 6.20 può scriversi

$$\dot{x} = -\sqrt{\phi(x)}$$

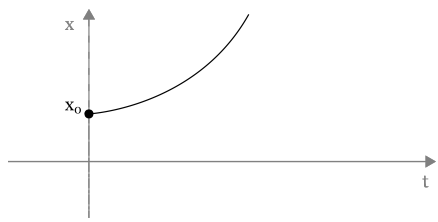
e la discussione, come si vedrà, sarebbe analoga.
Il caso $\dot{x}(0) = 0$ verrà discusso nel *Caso 3*.



che, integrata, fornisce ($\forall x \in I$)

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} = t(x)\,, \tag{6.25}$$

da cui, per inversione, si ricava la soluzione $x(t)$. Dato che, come segue da 6.24, $\dot{x} > 0$, tale soluzione è ovviamente crescente.
La *curva integrale* — cioè il grafico della soluzione $x(t)$ — è quindi del tipo indicato e va considerata nell'intervallo massimale.



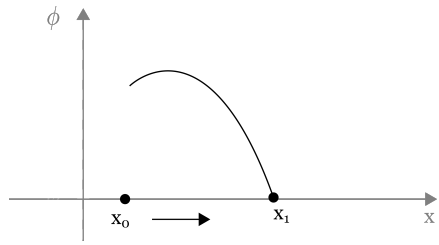
Nell'esempio del punto mobile sulla curva γ, il punto P si allontanerà dalla posizione x_0 verso le x crescenti.

Caso 2

Sia

- $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 > 0$
- $\phi(x)$ ha zeri per $x > x_0$. Sia $x_1 > x_0$ lo zero più prossimo a x_0, come riportato in figura.

L'equazione da considerare è ancora la 6.24, mentre la 6.25 fornisce la soluzione $x(t)$ nell'intervallo $0 \leq t \leq t_1$ (essendo t_1 il *tempo* impiegato per



raggiungere la posizione x_1):

$$t_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} \,. \tag{6.26}$$

Si osservi che l'integrale in 6.26 è **improprio** (o generalizzato): si potrebbe dimostrare che

$$t_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} = \begin{cases} < +\infty & \text{converge se } x_1 \text{ è zero } \textit{semplice} \text{ per } \phi(x) \\ \\ = +\infty & \text{diverge se } x_1 \text{ è zero } \textit{multiplo} \text{ per } \phi(x) \end{cases}$$

Si ricordi inoltre che x_1 è zero per $\phi(x_1)$ se $\phi(x_1) = 0$. Esso è

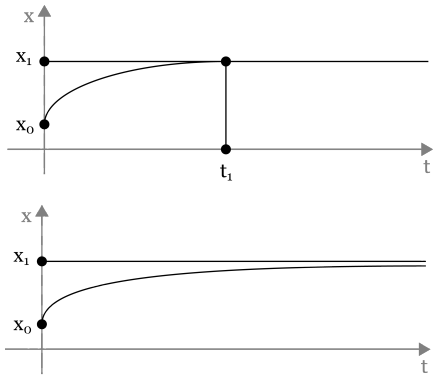
1. **semplice** se $\phi'(x_1) \neq 0$;
2. **multiplo** se $\phi'(x_1) = 0$.

Nei due casi precedenti l'andamento delle rispettive curve integrali è

1. x_1 è **semplice**;
2. x_1 è **multiplo** e, in questo caso, l'andamento si dice *asintotico*.

Nell'esempio del punto vincolato sulla curva γ, la posizione x_1 è raggiunta in un tempo infinito ed il problema è completamente risolto.
Nel caso in cui x_1 sia semplice, la posizione x_1 è raggiunta in un tempo finito t_1 e diventa necessario porsi il problema di cosa "possa succedere" per $t > t_1$. Si pensi ancora all'esempio del punto mobile sulla curva γ: cosa succede dopo l'istante t_1 in cui P raggiunge la posizione x_1?[7]
Per rispondere a questa domanda è sufficiente considerare il caso *escluso* nel Caso 1, ovvero supporre il seguente.

[7] P raggiungerà la posizione x_1 con velocità nulla poiché $\dot{x}_1 = \sqrt{\phi(x_1)} = 0$.



Caso 3

Sia

- $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0$.

Ciò significa che x_0 è uno *zero*, quindi $\dot{x}_0 = \sqrt{\phi(x_0)} = 0$. Si delineano allora due possibilità:

1. x_0 è **multiplo** e la soluzione, per $t \geq 0$, è

$$x = x_0 \qquad \forall t\,.$$

   Infatti $x = x_0$ è soluzione dell'equazione 6.12[8] dato che[9]

$$\phi'(x_0) = 2f(x_0) = 0\,,$$

   soluzione unica (soluzione statica).

2. x_0 è **semplice**: si osservi in tal caso che $x = x_0$ è soluzione dell'equazione di Weierstrass 6.20, mentre non lo è dell'equazione 6.12 dato che

$$\phi'(x_0) = 2f(x_0) \neq 0\,.$$

   Come mai? E qual è la soluzione *giusta* per la 6.12 e la 6.20?

Il fatto è che per $x(0) = x_0$ l'equazione 6.20 non ha un'unica soluzione. E, d'altra parte, l'equazione 6.12 ha soluzione certamente non nulla e unica

[8] E anche dell'equazione 6.20.
[9] Vedi 6.17 e 6.19.

per le condizioni iniziali assegnate.
Non è difficile rendersi conto che la soluzione "giusta" è

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} \qquad \text{se } \phi'(x_0) > 0\,, \tag{6.27}$$

oppure

$$t = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} \qquad \text{se } \phi'(x_0) < 0\,. \tag{6.28}$$

Nel caso 6.27, l'andamento di $\phi(x)$ è del tipo rappresentato in figura con

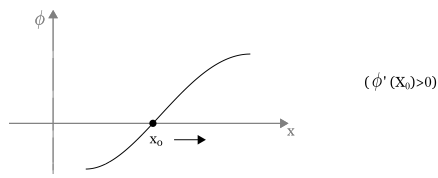


Figura 6.1: $\phi'(x_0) > 0$

$x(t)$ crescente.
Nel caso 6.28 l'andamento di $\phi(x)$ è del tipo rappresentato in figura con

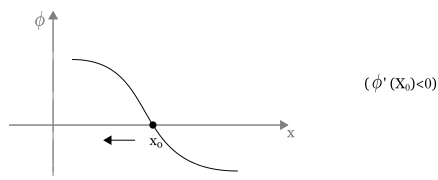
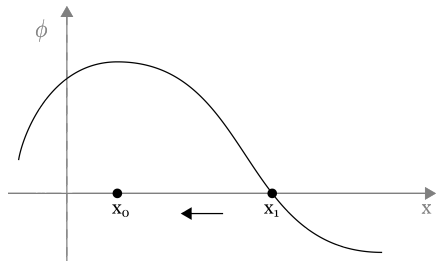


Figura 6.2: $\phi'(x_0) < 0$

$x(t)$ decrescente.
Si tenga conto che gli integrali 6.27 e 6.28 sono *impropri ma convergenti* — dato che x_0 è semplice — per lo stesso motivo per cui l'integrale 6.26 converge se x_1 è zero semplice.

Quanto ora detto consente di rispondere alla questione posta alla fine del Caso 2 di x_1 zero semplice, vale a dire: cosa succede *dopo* che viene

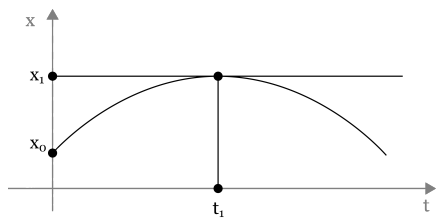


raggiunta la posizione x_1 all'istante t_1? In tal caso il grafico di $\phi(x)$ è come in figura.

Si ha quindi $\phi(x_1) = 0$ e $\phi'(x_1) < 0$, ne viene che l'equazione di Weierstrass è $\dot{x} = -\sqrt{\phi(x)}$, per cui la soluzione è

$$t = -\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} \qquad (t > t_1)\,.$$

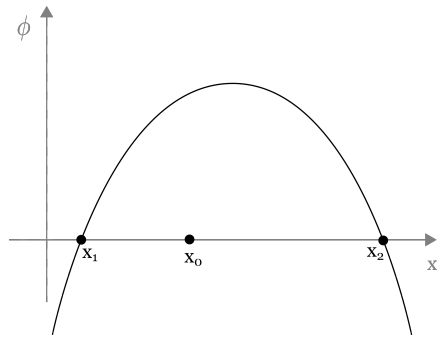
Nell'esempio del punto sulla curva γ, il punto P arriva nella posizione x_1[10] e poi torna indietro verso x_0 fino ad oltrepassarlo — raggiungendo così o un altro zero o continuando il suo moto fino ai limiti di variabilità di x.
La curva integrale $x = x(t)$ è del tipo in figura, e ciò conclude questa discussione.



Caso 4

Può essere interessante considerare il seguente caso particolare: $\phi(x)$ ammette *due* zeri semplici successivi, x_1 e x_2.
Sia $x(0) = x_0$, $x_1 < x_0 < x_2$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 > 0$[11]. Si pensi — per semplicità — all'esempio del punto P mobile sulla curva γ:

[10] Con velocità nulla.
[11] Se $\dot{x}_0 < 0$ la discussione è analoga.



Inizialmente l'equazione da considerare è

$$\dot{x} = \sqrt{\phi(x)} \qquad\qquad (\text{con } \dot{x}_0 > 0)$$

quindi la soluzione $x(t)$ descrive il moto di P da x_0 verso le x crescenti, fino ad arrivare alla posizione x_2 (ancora con velocità nulla) nel tempo

$$t_{0,2} = \int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} \,. \tag{6.29}$$

Poiché x_2 è zero semplice, P torna indietro (e quindi $x(t)$ è decrescente) ed il moto è regolato dall'equazione

$$\dot{x} = -\sqrt{\phi(x)}$$

fino a raggiungere la posizione x_1 nel tempo

$$t_{2,1} = -\int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} \,. \tag{6.30}$$

Riparte quindi da x_1 e raggiunge la posizione iniziale x_0 nel tempo

$$t_{1,0} = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} \tag{6.31}$$

e, in tale istante, $\dot{x}_0 = \sqrt{\phi(x_0)}$ (ovvero ha la stessa velocità iniziale). Il moto poi continua "oscillando" indefinitamente tra le posizioni x_1 e x_2. Non è difficile provare che il moto di P — e più in generale la soluzione $x(t)$ — è un moto **periodico** di periodo

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(\phi(x))}} \,, \tag{6.32}$$

pertanto risulta

$$x(t+T) = x(t) \qquad \forall t \geq 0\,. \tag{6.33}$$

Dimostrazione

Si osservi anzitutto che

$$T = t_{0,2} + t_{2,1} + t_{1,0}\,,$$

come evidente da 6.29, 6.30 e 6.31. Inoltre, dato che l'equazione 6.12 è *autonoma*, se $x(t)$ è soluzione allora anche $x(t+K)$ (con k costante) è soluzione. Quindi, in particolare, $x(t+T)$ è soluzione di 6.12.
Si osservi infine che

$$x(0+T) = x_0 = x(0) \qquad \text{e} \qquad \dot{x}(0+T) = \dot{x}_0 = \dot{x}(0)\,,$$

ciò significa che le due soluzioni $x(t)$ e $x(t+T)$ hanno gli stessi valori iniziali.
Per l'unicità delle soluzioni dell'equazione 6.12 segue quindi $x(t+T) = x(t)$, che è ciò che si intendeva dimostrare.

6.2.4 Il pendolo semplice: esempio sull'equazione di Weierstrass

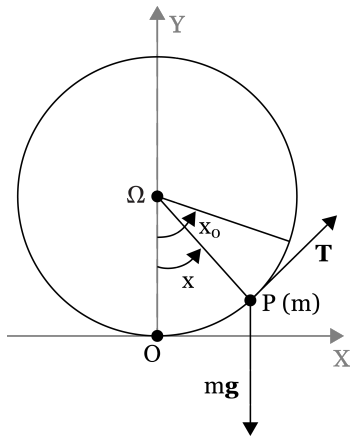
Dal corso di Fisica è noto cosa sia il pendolo semplice: si tratta di un punto materiale di massa m vincolato su una circonferenza *verticale*, *liscia* e di raggio l.
La forza attiva è il penso $m\mathbf{g}$ e il riferimento cartesiano è rappresentato in figura, con Y verticale ascendente.

Si sceglie come coordinata lagrangiana l'angolo x ($O\Omega P$). Essendo

$$X = l \sin x \qquad \text{e} \qquad Y = l - l\cos x\,,$$

si trova

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{x}^2 \qquad \text{e} \qquad U = -mg(l - l\cos x)\,.$$



L'equazione di Lagrange è

$$ml^2\ddot{x} + mgl\sin x = 0$$

e quindi[12], posto $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = x_0$,

$$\ddot{x} = \frac{g}{l}\sin x\,. \tag{6.34}$$

Si tratta di una equazione del tipo 6.12 la cui corrispondente equazione di Weierstrass deriva dall'integrale dell'energia

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int m\frac{g}{l}\sin x = \text{ cost}$$

perciò

$$\dot{x}^2 - \frac{2g}{l}\cos x = \dot{x}_0^2 - \frac{2g}{l}\cos x_0\,,$$

ovvero

$$\dot{x}^2 = \frac{2g}{l}(\cos x - \cos x_0) + \dot{x}_0^2 = \phi(x) \tag{6.35}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Caso semplice

Consideriamo il caso più semplice, quello cioè in cui $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

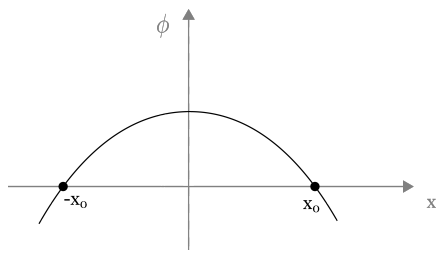
[12] Lo studente trovi la stessa equazione usando $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \phi$.

In tal caso l'equazione 6.35 si particolarizza in

$$\dot{x}^2 = \frac{2g}{l}(\cos x - \cos x_0) = \phi(x)\,. \tag{6.36}$$

E' immediato verificare che ϕ ammette *due* zeri semplici ($\pm x_0$)[13]: il punto P parte con velocità nulla dalla posizione x_0 verso le x decrescenti, infatti

$$\phi'(x_0) = -\frac{2g}{l}\sin x_0 < 0\,.$$



Il moto avviene tra le due posizioni x_0 e $-x_0$ con oscillazione periodica di periodo

$$T = 2\int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos x - \cos x_0)}}\,.$$

Caso generale

Sia $x(0) = x_0$, non è limitativo supporre $\dot{x}_0 > 0$. In tal caso l'equazione 6.35 può scriversi

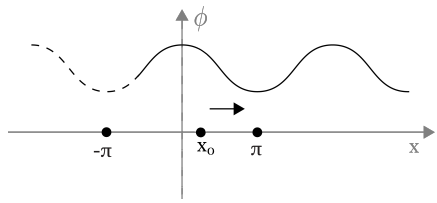
$$\dot{x}^2 = \frac{2g}{l}\cos x + \left[\dot{x}_0^2 - \frac{2g}{l}\cos x_0\right] = \frac{2g}{l}\cos x + \alpha = \phi(x)\,. \tag{6.37}$$

Poiché $\phi' = -\frac{g}{l}\sin x$, è evidente che $\pm\pi$ sono punti di *minimo* per $\phi(x)$ e che $x = 0$ è di massimo.

Esaminiamo ora i tre casi.

1. Sia $\phi(\pi) > 0$: ne viene che $\phi(x)$ non ha zeri nell'intervallo $[-\infty, +\infty]$. Il punto parte da x_0 e la soluzione è fornita — per inversione — da

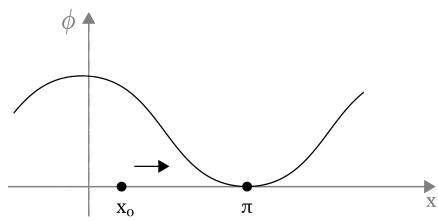
[13] Si provi che, se $x_0 = 0$, P rimane in quiete.



$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2g}{l}\cos x + \alpha}} \,. \tag{6.38}$$

Il punto P "gira" indefinitamente sulla circonferenza ($\dot{x}(t) > 0\,, \forall t$).

2. Sia $\phi(\pi) = 0$: ne viene che π è zero *doppio*.
   P si muove verso le x crescenti e la soluzione è ancora fornita da

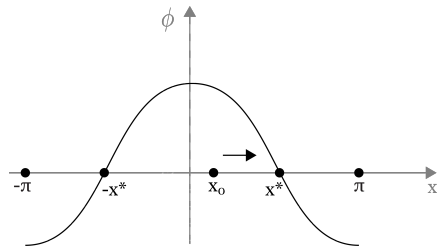


6.38: il moto è asintotico e raggiunge la posizione π in un tempo infinito, dato che

$$\int_{x_0}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos x + \alpha)}} = +\infty \,.$$

3. Sia $\phi(\pi) < 0$: in tal caso la funzione ϕ è negativa in $\pm\pi$ (punti di minimo) ed esistono quindi due zeri — ovviamente semplici — $\pm x^*$, simmetrici rispetto all'origine dato che $\phi(x)$ è una funzione pari.
   Il moto avviene tra le posizioni $\pm x^*$ ed è periodico di periodo

$$T = 2\int_{-x^*}^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos x + \alpha)}} \,.$$



6.3 Discussione generale del problema dei due corpi

Si è visto che le equazioni di Lagrange forniscono

$$\begin{cases} m^*\ddot{r} - \frac{m^* c^2}{r^3} = \frac{\partial U}{\partial r} \\ \dot{\theta} = \frac{c}{r^2} \end{cases} \tag{6.39}$$

e, mediante l'integrale dell'energia, si arriva a

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m^*}\Big[E + U(r)\Big] - \frac{c^2}{r^2} = \phi(r) \tag{6.40}$$

che è un'equazione del tipo di Weierstrass da risolvere nel modo indicato nel paragrafo precedente. Vale la pena però ragionare sulle seguenti due osservazioni:

1. risolta la 6.40, dove E e c sono espresse mediante le condizioni iniziali

$$r(0) = r_0\,, \qquad \dot{r}(0) = \dot{r}_0\,, \qquad \theta(0) = \theta_0\,, \qquad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \tag{6.41}$$

   si conosce

$$r = r(t, r_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0) \tag{6.42}$$

   e, dalla 6.39_2, segue

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \frac{c\,dt}{r^2(t, r_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0)}\,. \tag{6.43}$$

2. Si precisa che, escluso l'esempio del collasso gravitazionale classico che vedremo più avanti, nel seguito si considererà sempre $c \neq 0$.
   E' inoltre evidente fin d'ora che, per $c = 0$, da 6.39_2 segue $\dot{\theta} = 0$, ovvero $\theta = \theta_0$. Quindi la traiettoria — che nei moti centrali si suol dire *orbita* — giace su una retta passante per S.

6.3.1 Caso di forze repulsive

Nel caso di forze repulsive, la forza che S esercita su P è

$$\mathbf{F} = F(r)\mathbf{u}\,, \qquad \text{con } F(r) > 0 \text{e } r \in \mathbb{R}^+\,.$$

Conviene ora riscrivere la 6.40 così:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m^*}\left[E + \int F(r)dr\right] - \frac{c^2}{r^2} = \phi(r)\,. \tag{6.44}$$

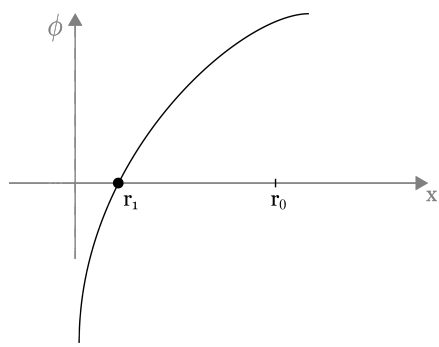
Si vede subito che

$$\phi'(r) = \frac{2}{m^*}F(r) + \frac{2c^2}{r^3} > 0 \qquad \forall r\,,$$

quindi $\phi(r)$ è crescente per valori di r tali che $0 < r < +\infty$.
Tuttavia anche il potenziale $U(r)$ è crescente (infatti $\frac{dU}{dr} = F(r) > 0$): ne segue che

$$\begin{cases} \lim_{r\to\infty} \phi(r) = \sup \phi(r) \Big|_{\mathbb{R}} \\ \\ \lim_{r\to 0^+} \phi(r) = -\infty \end{cases}$$

e quindi il grafico di $\phi(r)$ è del tipo in figura, dove $\phi(r)$ ha uno solo zero *semplice*.



Se $r(0) = r_0$ — sarà ovviamente $r_0 > r_1$ se si vogliono escludere $\dot{r}$ immaginari — si distinguono due casi:

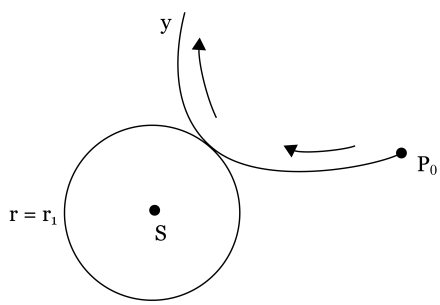
1. $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0} < \mathbf{0}$
   L'equazione 6.44 diviene $\dot{r} = -\sqrt{\phi(r)}$ e la soluzione è

$$t = -\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\phi(r)}} \qquad \text{con } 0 \leq t \leq t_1\,, \tag{6.45}$$

   dove $t_1 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\phi(r)}}$.
   Consegue che $r(t)$ decresce fino al valore r_1, con $\dot{r}_1 = 0$, dopodiché l'equazione da considerare sarà $\dot{r} = \sqrt{\phi(r)}$ e la soluzione

$$t = \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\phi(r)}} \qquad \text{con } t \geq t_1\,, \tag{6.46}$$

   quindi con $r(t)$ crescente.
   Sul piano delle orbite si ha dunque un andamento del tipo riportato in figura.



2. $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0} > \mathbf{0}$
   La soluzione è fornita da 6.46: $r(t)$ è crescente ed il punto P si allontana indefinitamente da S.

6.3.2 Caso di forze newtoniane repulsive

E' noto che una forza newtoniana è del tipo

$$\mathbf{F}(r) = \frac{\alpha}{r^2}\mathbf{u} \tag{6.47}$$

ed è repulsiva quando $\alpha > 0$. Il potenziale è

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}\,, \qquad \text{con } \alpha > 0\,, \tag{6.48}$$

quindi l'equazione di Lagrange risulta

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = \frac{\alpha}{m^*}\frac{1}{r^2}\,. \tag{6.49}$$

E' dunque facile determinare le orbite: sarà sufficiente ricordare che

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} \qquad \text{e che} \qquad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \qquad ,$$ [14]

da cui

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{c}{r^2} = -\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}c$$

e, quindi,

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = -\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\theta_c = -\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\frac{c^2}{r^2}\,.$$

Da 6.49 si ottiene:

$$-\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\frac{c^2}{r^2} - c^2\frac{1}{r^3} = \frac{\alpha}{m^*}\frac{1}{r^2}$$

e, in definitiva, la 6.49 diviene:

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{\alpha}{m^* c^2}\,. \tag{6.50}$$

Posto $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{m^* c^2}$, dalla 6.50 (che è un'equazione del secondo ordine) segue l'integrale generale[15]

$$\frac{1}{r} = \frac{-1 + \rho\cos(\theta + \lambda)}{p}\,, \tag{6.51}$$

equazione che rappresenta un'iperbole.
L'equazione 6.40 si riscrive allora come

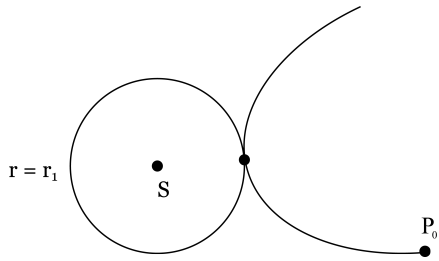
$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m^*}\left[E - \frac{\alpha}{r}\right] - \frac{c^2}{r^2}\,, \tag{6.52}$$

in cui

$$E = \frac{1}{2}m^* v^2 + \frac{\alpha}{r} > 0 \qquad \forall r\,.$$

Analogamente al caso generale, $\phi(r)$ ha uno solo zero semplice $r = r_1$ e l'orbita è del tipo riportata in figura.

[14] Poiché $\dot{\theta} = c/r^2$.
[15] L'integrale generale dell'omogenea è $\frac{1}{r} = A\cos(\theta + \lambda)$.



6.3.3 Caso di forze attrattive

Nel caso attrattivo la forza che S esercita su P è

$$\mathbf{F}(r) = F(r)\mathbf{u}\,, \qquad \text{con } F(r) < 0 \qquad ^{16}$$

che rappresenta una condizione più complicata della precedente in quanto $\phi(r)$ può avere più di uno zero semplice e possono presentarsi anche zeri multipli.
Riferendoci all'equazione 6.40 distingueremo diversi casi possibili: ipotizziamo per ora

$$r(0) = r_0 \qquad \text{e} \qquad \dot{r}(0) = \dot{r}_0 > 0\,.$$

<u>Caso 1:</u> in $[r_0, +\infty)$ non cadono zeri di $\phi(r)$

La soluzione è fornita per inversione da

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\phi(r)}}\,, \tag{6.53}$$

dove $r(t)$ è crescente e, noto il quale, θ può essere dedotto da $\dot{\theta} = c/r^2$.
Scriviamo l'equazione polare dell'orbita: da

$$\theta = \frac{c}{r^2} dt$$

si ricava[17]

$$d\theta = c\frac{dr}{r^2\sqrt{\phi(r)}}\,. \tag{6.54}$$

[16] Si pensi $F(r) \in C^k_{]0,+\infty}$: il raggio d'azione delle forze classiche è $+\infty$.
[17] Poiché $dt = \frac{dr}{\sqrt{\phi(r)}}$.

Integrando,

$$\theta - \theta_0 = c \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\phi(r)}} \tag{6.55}$$

fornisce (sempre per inversione) l'equazione polare dell'orbita: $r = r(\theta)$ o, a rigore, $r = r(\theta, r_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0)$.

<u>Caso 2:</u> in $[r_0, +\infty)$ cadono zeri di $\phi(r)$

Definito $r_1 (> r_0)$ lo zero più vicino a r_0, analizziamo i casi di zero multiplo e zero semplice.

Zero Multiplo: $\phi(r_1) = 0$.
Sia ad esempio il grafico di $\phi(r)$ riportato in Figura 6.3.

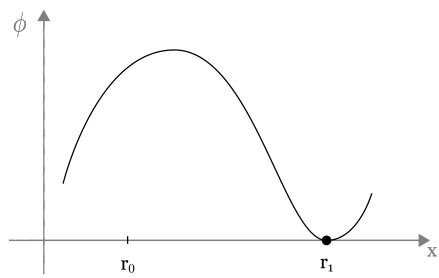


Figura 6.3: *caso di r_1 multiplo.*

La $r(t)$ raggiunge il valore r_1 nel tempo

$$t_1 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\phi(r)}} = +\infty$$

e l'andamento della soluzione $r(t)$ è di tipo *asintotico*, come riportato in Figura 6.4.

L'andamento sul piano dell'orbita è invece schematizzato in Figura 6.5, dove si mostra che l'orbita si avvicina asintoticamente alla circonferenza di equazione polare $r = r_1$.

Zero Semplice: $\phi(r_1) \neq 0$.
Sia ad esempio il grafico di $\phi(r)$ riportato in Figura 6.6.

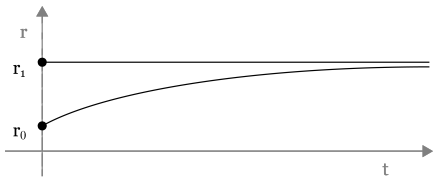


Figura 6.4: *andamento di $r(t)$, caso r_1 multiplo.*

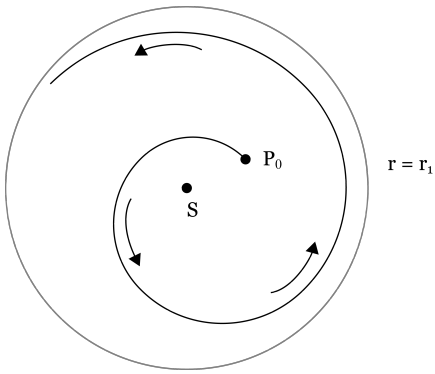


Figura 6.5: *andamento sul piano dell'orbita, caso r_1 multiplo.*

Il tempo è allora

$$t_1 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\phi(r)}} < +\infty$$

e quindi $r(t)$ arriverà a raggiungere il valore r_1 con velocità $\dot{r}(t_1) = 0$. Per $t > t_1$ la soluzione sarà invece

$$t = -\int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\phi(r)}}\,,$$

con $r(t)$ decrescente.
In Figura 6.7 si mostra allora l'andamento indicativo sul piano delle orbite:

per $t > t_1$ l'andamento dell'orbita dipenderà, ad esempio, dal fatto che esistano zeri nell'intervallo $(0, r_0)$, come si vedrà nel caso successivo.

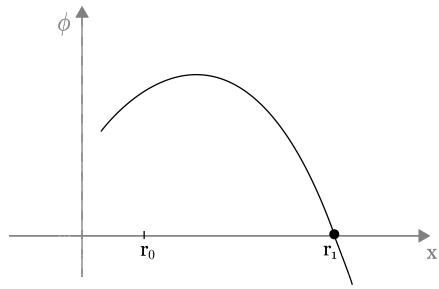


Figura 6.6: *caso di r_1 semplice.*

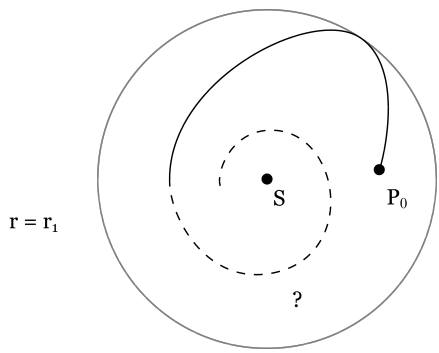


Figura 6.7: *andamento sul piano dell'orbita, caso r_1 semplice.*

<u>Caso 3:</u> r_0 compreso tra due zeri semplici successivi

Sia r_0 compreso tra due zeri semplici successivi r_1 e r_2 come indicato in Figura 6.8, ovvero sempre con $\dot{r}_0 > 0$.

Questo caso è già stato analizzato: l'andamento di $r(t)$ è **periodico** e di periodo

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dr}{\sqrt{\phi(r)}} \,, \tag{6.56}$$

quindi la curva integrale $r = r(t)$ è del tipo rappresentato in Figura 6.9 e $r(t+T) = r(t) \;\; \forall t \geq 0$.

La traiettoria sul piano delle orbite è schematizzata in Figura 6.10.

La periodicità di $r(t)$ non assicura di per sé che l'orbita sia chiusa e che il moto sia periodico. Affinché invece l'orbita sia *certamente* chiusa —

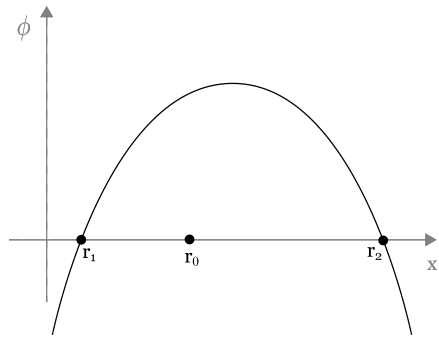


Figura 6.8: *grafico di $\phi(r)$, caso di r_0 compreso tra due zeri semplici.*

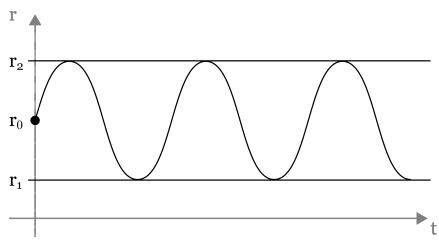


Figura 6.9: *curva integrale, caso di r_0 compreso tra due zeri semplici successivi.*

e periodico il moto — occorre anche che

$$\theta(t) = \int \frac{c}{r^2(t)} dt$$

sia opportuna. Si potrebbe dimostrare che, condizione necessaria e sufficiente affinché l'orbita sia chiusa (ed il moto periodico), e posto

$$\Delta\theta = c \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\phi(r)}} \,,$$

è che la variazione di θ, al variare di r tra r_1 e r_2 (vedi 6.54), risulti

$$\Delta\theta = \frac{m}{n} 2\pi \qquad \text{con } m, n \text{ interi}\,.$$

In tal caso — dopo m "giri", e nel tempo nT — il punto ritorna nella posizione iniziale P_0 ed il moto è periodico di periodo nT.

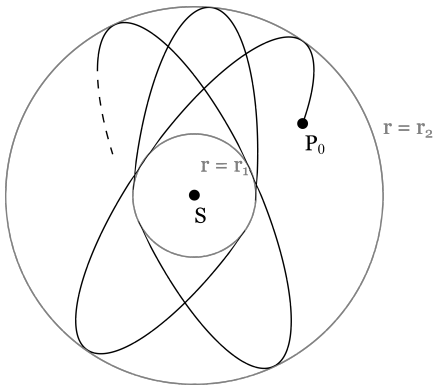


Figura 6.10: *orbita nel caso di r_0 compreso tra due zeri semplici successivi.*

6.4 Cenni sul caso gravitazionale

6.4.1 Orbite

Il potenziale gravitazionale è $U = \gamma \frac{mM}{r}$, quindi la 6.40 diventa

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m^*}\left[E + \gamma\frac{mM}{r}\right] - \frac{c^2}{r^2} = \phi(r)\,. \tag{6.57}$$

Come segue subito dallo stesso calcolo fatto nel Paragrafo 6.3.2 — pur di cambiare il segno del potenziale e posto $\alpha = \gamma mM$ — le orbite risultano essere delle coniche. In tal caso si ottiene

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\theta + \lambda)}{p}\,, \tag{6.58}$$

ovvero

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta + \lambda)}\,, \tag{6.59}$$

che è appunto una conica di fuoco S.

Come è noto[18] si tratta:

a. di una *iperbole* se $E > 0$ $\quad (e > 1)$;

b. di una *parabola* se $E = 0$ $\quad (e = 1)$;

[18] Il caso gravitazionale è esaurientemente trattato nel corso di Astronomia (vedi *C. Barbieri*, "Lezioni di Astronomia", Cap. 12).

c. di una *ellisse* se $E < 0 \qquad (e < 1)$.

Dalla 6.57 segue allora

$$\lim_{r \to 0^+} \phi(r) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{r \to +\infty} \phi(r) = \frac{2E}{m^*} \tag{6.60}$$

e quindi, relativamente ai tre casi appena distinti, il grafico di $\phi(r)$ sarà quello riassunto in Figura 6.11.

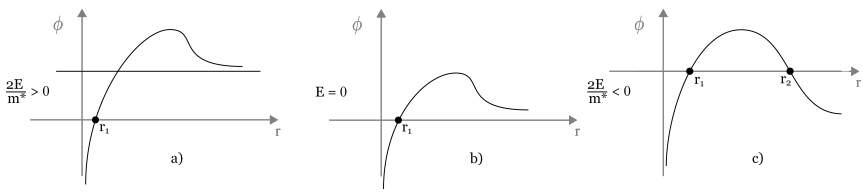


Figura 6.11: *andamento di $\phi(r)$ per i tre casi di orbita possibile.*

Nel caso $r_1 = r_2 = r_0$ (zero doppio, Figura 6.12) la soluzione è $r = r_0$ e l'orbita risulterà circolare.

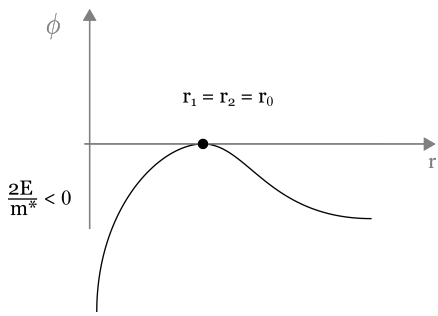


Figura 6.12: *andamento di $\phi(r)$ nel caso di zero doppio (circolare).*

6.4.2 Orbite circolari. Paradosso del satellite

Consideriamo ancora il caso gravitazionale. Abbiamo appena visto che le orbite sono coniche e si tratta di ellissi se $E < 0$; se queste fossero circolari si avrebbe semplicemente $r = \text{cost}$.

Per analizzarle conviene considerare le equazioni di Lagrange: la 6.8_1 fornisce ($\dot{r} = 0$)

$$m^* r^2 \dot{\theta}^2 = \gamma \frac{mM}{r^2}\,, \tag{6.61}$$

quindi l'integrale delle aree

$$r^2 \dot{\theta} = c$$

— poiché si sta considerando il caso di $r = \text{cost}$ — implica $\dot{\theta} = \text{cost}$. Risulta inoltre

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = r^2 \dot{\theta}^2 = \text{cost}\,,$$

quindi da 6.61 si ha

$$v^2 = \gamma \frac{mM}{m^*} \frac{1}{r}$$

che fornisce la velocità dell'orbita circolare di raggio r. Nel caso $M \gg m$, $m^* \cong m$ e dunque

$$v^2 = \frac{\gamma M}{r} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{\gamma M}{m}} \tag{6.62}$$

che, appunto, diremo **velocità dell'orbita circolare**[19].
Si osservi che nell'orbita circolare (vedi 6.62_1)

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r}\,,$$

mentre

$$E = T - U = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r} - \gamma \frac{mM}{r} = -\frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r}\,,$$

da cui segue che, se l'orbita è circolare,

$$T = -E\,. \tag{6.63}$$

Consideriamo allora il cosiddetto **paradosso del satellite artificiale**. Ci sia un generico satellite artificiale in orbita circolare "abbastanza vicina" alla Terra: il piccolo attrito a cui è soggetto[20] ne abbassa l'orbita che, però, riesce a mentenersi sufficientemente circolare. Ciò che si osserva è

[19] **Esercizio:** Ritenendo in buona approssimazione circolare l'orbita della Terra — e utilizzando (in unità MKS) $\gamma = 6.7 \times 10^{-11}$, $M_{sole} = 2 \times 10^{30}$ e $r = 1.5 \times 10^{11}$ — trovare la velocità di rivoluzione della Terra ($v \approx 30$ Km/s).

[20] Dovuto agli strati superiori dell'atmosfera.

una sensibile *accelerazione* del satellite, fatto controintuitivo ma spiegato dall'equazione 6.63. Derivandola, infatti, si ottiene

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dE}{dt}$$

e, poiché $dE/dt < 0$ (l'energia diminuisce sensibilmente proprio a causa dell'attrito), si avrà una variazione $dT/dt > 0$, cioé il satellite accelera. L'effetto è naturalmente temporaneo: non appena l'attrito aumenti ulteriormente, l'orbita cesserà di essere "approssimativamente" circolare, la 6.63 non varrà più e il satellite spiralizzerà verso la Terra a causa della sempre maggiore resistenza.

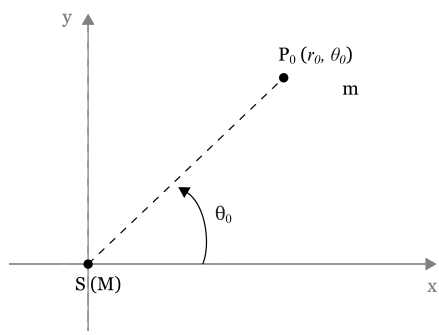
6.4.3 Collasso gravitazionale classico

In questo e nel successivo paragrafo considereremo il caso gravitazionale nella condizione in cui $M \gg m$. In questo contesto abbiamo $m^* \approx m$ e l'equazione 6.58 diventa quindi

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left[E + \frac{\gamma m M}{r}\right] - \frac{c^2}{r^2}\,. \tag{6.64}$$

Siano queste le condizioni iniziali:

$$r(0) = r_0\,, \qquad \dot{r}(0) = 0\,, \qquad \theta(0) = \theta_0\,, \qquad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = 0\,.$$



E' evidente che la costante c delle aree è

$$c = r^2\dot{\theta} = r_0^2\dot{\theta}_0 = 0\,,$$

quindi il punto partirà da P_0 con velocità $v_0^2 = \dot{r}_0^2 + r_0^2\dot{\theta}_0^2 = 0$.
Segue allora che l'equazione 6.64 è

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left[E + \gamma\frac{mM}{r}\right], \tag{6.65}$$

in cui

$$E = T - U = T_0 - U_0 = -\gamma\frac{mM}{r_0}\,. \qquad [21]$$

In definitiva l'equazione diviene

$$\dot{r}^2 = 2\gamma M\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right] = \phi(r)\,.$$

Il grafico di $\phi(r)$ è del tipo riportato in Figura 6.13, dove r_0 è uno zero semplice e la soluzione porta a valori $r(t)$ decrescenti. L'equazione da considerare è quindi

$$\dot{r} = -\sqrt{2\gamma M\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right]}\,. \tag{6.66}$$

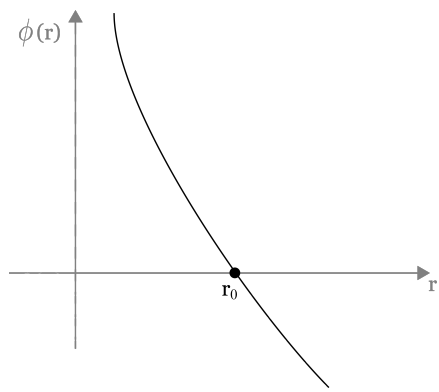


Figura 6.13: *andamento di* $\phi(r)$.

La traiettoria del punto sarà rettilinea — infatti $\theta = \theta_0 = \text{cost}$ — il moto di P avverrà sulla retta SP_0 e la soluzione dell'equazione 6.66 fornirà

[21] $T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$.

la legge oraria sulla traiettoria.
Separando le variabili in 6.66 si ottiene

$$\sqrt{2\gamma M}\, dt = -\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}}\,,$$

quindi

$$\sqrt{2\gamma M}\, t = -\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}}\,.$$

Risulta[22] allora

$$\sqrt{2\gamma M}\, t = r_0^{3/2} \arctan\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} + r_0^2\sqrt{\frac{r}{r_0} - \frac{r^2}{r_0^2}}\,, \tag{6.67}$$

che esprime la soluzione. Il tempo $\bar{t}$ impiegato dal punto P per arrivare a cadere sul centro di forza S è fornito invece da

$$\sqrt{2\gamma M}\, \bar{t} = r_0^{3/2}\frac{\pi}{2}\,, \tag{6.68}$$

che si ottiene da 6.67 passando al limite per $r \to 0$.

Sfera omogenea

Sia data una sfera omogenea di centro S, raggio r_0 e massa M, le cui particelle siano tutte inizialmente in quiete ($t = 0$) e in cui le uniche forze agenti siano quelle gravitazionali. Qual è il tempo di collasso? Qual è, cioè, il tempo necessario affinché tutte le particelle collassino sul centro S?

Ricordando che gli effetti gravitazionali di una sfera omogenea — al suo esterno o sul bordo — sono quelli di un punto di egual massa nel suo centro S, da 6.67 segue

$$\sqrt{2\gamma M}\, t_{coll} = r_0^{3/2}\frac{\pi}{2}\,,$$

ovvero

$$t_{coll} = \pi\sqrt{\frac{r_0^3}{8\gamma M}}\,. \tag{6.69}$$

[22] L'integrale a secondo membro non è di difficile soluzione, basta porre $u^2 = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}$ da cui si ottiene $r = \frac{1}{u^2+\frac{1}{r_0}} = \frac{1}{u^2+a^2}$, indicando $a^2 = \frac{1}{r_0}$. Poiché $dr = -\frac{2udu}{(u^2+a^2)^2}$, l'integrale in questione si riduce al calcolo di $\int \frac{2du}{(u^2+a^2)^2}$ ecc ecc.

E' interessante notare che il tempo di collasso dipende essenzialmente dalla **densità**. Infatti, sostituendo nella 6.69 la relazione $M = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho$, con ρ la densità, si ottiene

$$t_{coll} = \sqrt{\frac{3\pi}{32}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma\rho}} \approx \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\gamma\rho}} \,. \tag{6.70}$$

Distribuzione sferica di massa

Quanto detto per la sfera omogenea si generalizza subito al caso più realistico di una *distribuzione sferica di massa*, ossia una sfera la cui densità sia funzione della sola distanza dal centro S, ovvero, posto $SP = \mathbf{r}$,

$$\rho = \rho(r) \,,$$

con $\rho(r)$ integrabile e decrescente in $[0, r_0]$. In tal caso, detta

$$\rho_m = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$$

la *densità media*, dalla 6.70 si ottiene

$$t_{coll} = \sqrt{\frac{3\pi}{32}} \frac{1}{\sqrt{\gamma\rho_m}} \,. \tag{6.71}$$

Ciò segue dal fatto che gli effetti gravitazionali di una distribuzione sferica di massa — all'esterno o sul bordo — equivalgono a quelli di un punto di massa M posto in S e, quindi, a quelli di una sfera omogenea di densità ρ_m. Per lo stesso motivo vale anche in questo caso la formula 6.69.

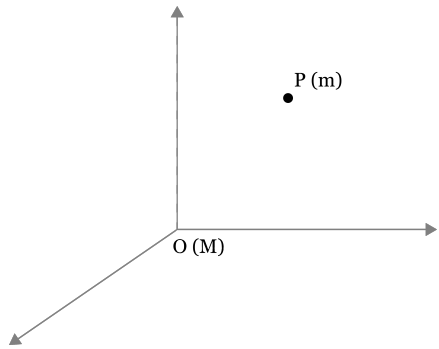
6.4.4 Raggio di Swarchild

E' noto che se un punto P di massa m è soggetto ad un campo gravitazionale dovuto ad una massa puntiforme M posta in O (si pensi $M \gg m$), la *velocità di fuga* del punto P, posto a distanza r_0, sarà

$$v_f = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}} \,. \qquad [23]$$

[23] Ciò deriva dal fatto che l'orbita di P, per sfuggire, deve essere *aperta*, deve cioè essere una parabola o un'iperbole: si ha una parabola se $E = 0$, un'iperbole se $E > 0$. L'energia minima per sfuggire è quindi

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{r_0} = 0 \qquad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}.$$



Ad esempio, la velocità di fuga di un missile posto sulla superficie di una distribuzione sferica di massa M è

$$v_f = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$$

dove R è il raggio della sfera[24].

Il raggio di Swarchild proviene dal problema inverso: determinare il raggio di una distribuzione sferica di massa M con una assegnata velocità di fuga, in questo caso $v_f = c$, la velocità della luce. Quindi

$$c = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$$

che fornisce

$$R_S = \frac{2\gamma M}{c^2}\,,$$

dove R_S indica il **raggio di Swarchild**.
Storicamente tale concetto fu introdotto per primo da Laplace ma assunse significato rilevante solo dopo che Einstein stabilì le equazioni della Relatività Generale e, successivamente, Swarchild ne trovò le soluzioni che portano il suo nome.

6.4.5 Collasso gravitazionale classico di una stella sferica

Una stella massiccia[25] può dare origine ad un buco nero — o ad una singolarità — quando ogni pressione (anche degli elettroni, dei neutroni,

[24] Per la Terra $v_f \cong 11.2$ Km/s.
[25] Si vedano i testi di astrofisica ed evoluzione stellare.

ecc.) non riesce più ad equilibrare le forze di gravitazione.
Si ritiene che il nucleo in collasso — purché superi una certa quantità critica, diciamo maggiore alle 3 masse solari — deternimi un buco nero. Naturalmente la teoria del processo abbisogna di nozioni di Relatività Generale e di meccanica quantistica, tuttavia ci limiteremo qui all'analisi del quadro fisico classico.

[A] Qual è il tempo di collasso *classico* di una stella avente densità media pari a quella dell'acqua (caso del Sole)?
Basta applicare l'equazione appena ricavata:

$$t_{coll} \cong \frac{1}{2\sqrt{\gamma\rho}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6.610^{-11}\cdot 1000}} \approx 2\times 10^3 \text{ s}\,,$$

cioè circa mezz'ora.

[B] Per quale valore (r_c) di r la velocità di collasso (classico!) arriva alla velocità della luce c?
Sia r_0 il raggio della stella. Dalla formula

$$\dot{r}^2 = 2\gamma M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

il valore r_c è fornito dall'equazione

$$c^2 = 2\gamma M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

e, quindi,

$$\frac{1}{r} = \frac{c^2}{2\gamma M} + \frac{1}{r_0}\,.$$

Abbiamo appena visto che

$$R_S = \frac{2\gamma M}{c^2}$$

è il cosiddetto *raggio di Swarchild*, ne viene che il valore r_c in cui le particelle raggiungono la velocità della luce sarà

$$r_c = \frac{R_S\cdot r_0}{R_S + r_0}\,.$$

Poiché supponiamo $R_S \ll r_0$, si ottiene un valore $r_c \cong R_S$.
A rigore però $r_c < R_S$ e — sempre nel quadro classico — le particelle

superano la velocità della luce ($v \to \infty$, $r \to 0$).
In Relatività, in prossimità di R_S, le cose vanno in modo alquanto diverso: un osservatore *lontano* dalla stella, dopo un rapidissimo affievolimento della luminosità[26], vedrebbe solo... un *buco nero*! Per tale osservatore il collasso procederebbe asintoticamente verso R_S.
Un osservatore sulla stella, invece, in tale riferimento precipiterebbe nel buco nero.

Esercizi

1. Ricordare il Teorema di Bertrand: *Per il moto centrale di una particella tutte le orbite limitate sono chiuse se e solo se il potenziale è elastico ($U = -kr^2$), oppure newtoniano ($U = k/r\,, k > 0$).*
   Riflettere sul caso delle forze elastiche trattato al paragrafo 7.5.2: l'orbita è ellittica con centro nel centro di forza e, nel caso newtoniano, il centro di forza è il fuoco dell'ellisse.

2. In un moto centrale, un'orbita chiusa corrisponde ad un moto periodico?
   Dimostrarlo.

3. Una particella — lo "*sfortunato astronauta*" dei libri divulgativi! — parte con $v(0) = 0$ a distanza R_S dalla singolarità centrale del buco nero. In quanto tempo arriva alla singolarità?

$$\bar{t} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R_S^3}{2\gamma M}}$$

   ma $2\gamma M = R_S c^2$, quindi

$$\bar{t} = \frac{\pi}{2}\frac{R_S}{c}\,.$$

   Confrontare questo risultato con quello che si otterrà in Relatività Generale.

4. Nel caso di un collasso sferico omogeneo, le particelle arrivano tutte nello stesso istante al centro della sfera? E nel caso della distribuzione sferica di massa?

[26] Durante la fase di collasso la luminosità diminuisce secondo la legge $L = k\exp\left(-\frac{ct}{R_S}\right)$ in cui, utilizzando gli stessi valori appena visti, $c/R_S \approx 2 \times 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$.

Capitolo 7

Statica Analitica

7.1 Equilibrio di sistemi olonomi

Si consideri un sistema olonomo a vincoli ideali fissi. Siano

$$Q_h(q, \dot{q}) = Q_h(q_1, q_2, ..., q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_N)\,, \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,, \tag{7.1}$$

le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva: si definisce **posizione di equilibrio** per il sistema una posizione

$$P^*(q_1^*, q_2^*, ..., q_N^*)$$

tale che risulti

$$Q_h(q_1^*, q_2^*, ..., q_N^*, 0, 0, ..., 0) = 0\,, \qquad \text{con } h = 1, ..., N\ , \tag{7.2}$$

intendendo che le componenti debbono essere valutate per valori nulli delle $\dot{q}_h$. Ne viene che le posizioni di equilibrio di un sistema del tipo detto, sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} Q_1(q_1, q_2, ..., q_N, 0, 0, ..., 0) = 0 \\ Q_2(q_1, q_2, ..., q_N, 0, 0, ..., 0) = 0 \\ ... \\ Q_N(q_1, q_2, ..., q_N, 0, 0, ..., 0) = 0\ . \end{cases} \tag{7.3}$$

Se il sistema è conservativo — e $U(q_1, ..., q_N)$ ne è il potenziale — il sistema che fornisce le posizioni di equilibrio è allora

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial U}{\partial q_N} = 0 \ . \end{cases} \tag{7.4}$$

Per un sistema olonomo a vincoli fissi la forza viva è[1]

$$T = \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}_h \dot{q}_k \qquad ,$$

risultando allora

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_h} \dot{q}_i \dot{q}_k \tag{7.5}$$

e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = a_{hk} \ddot{q}_k + \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_k \ . \tag{7.6}$$

Se Q_h sono quindi le componenti lagrangiane della sollecitazione, le equazioni di Lagrange sono rappresentate dalla forma

$$a_{hk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_h} \right) \dot{q}_i \dot{q}_k = Q_h \ , \qquad \text{con } h = 1, ..., N \ . \tag{7.7}$$

Poiché semplicemente scambiando gli indici di sommatoria (i, k) si ottiene

$$2 \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_k = \left(\frac{a_{hi}}{\partial q_k} \frac{a_{hk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i \dot{q}_k \ ,$$

la 7.7 diviene

$$a_{hk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{hi}}{\partial q_k} + \frac{a_{hk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_h} \right) \dot{q}_i \dot{q}_k = Q_h \ , \qquad \text{con } h = 1, ..., N \ .$$

Moltiplicando per A_{jk} — complemento algebrico di a_{ik} nella matrice $[a_{ik}]$, diviso per il valore del determinante — e ricordando che

$$A_{jh} a_{hk} = \delta_{jk} \ ,$$

si ottiene

$$\ddot{q}_j + A_{jh} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{hi}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_h} \right) \dot{q}_i \dot{q}_k = A_{jh} Q_h \ , \qquad \text{con } j = 1, ..., N$$

[1] Si sottointende il simbolo di sommatoria sugli indici ripetuti.

e quindi[2]

$$\ddot{q}_j + \begin{bmatrix} j \\ ik \end{bmatrix} \dot{q}_i \dot{q}_k = A_{jh} Q_h \,, \qquad \text{con } j = 1, ..., N \,. \tag{7.8}$$

Se $P^*(q^*)$ è una posizione di equilibrio per il sistema — e quindi valgono le 7.2 — le equazioni di Lagrange 7.8 ammettono la soluzione statica

$$q_j = q_j^* \,, \qquad \text{con } j = 1, ..., N \,.$$

Se si ipotizza che per 7.8 valgano le condizioni di esistenza ed *unicità*, tale soluzione è l'unica per cui valgano le condizioni iniziali

$$q_j(0) = q_j^* \,, \qquad \dot{q}_j(0) = 0 \qquad \text{con } j = 1, ..., N \,.$$

Se quindi il sistema viene posto nella posizione P^* con forza viva nulla nell'istante t_0, esso rimane indefinitamente in P^* per $t \geq t_0$.

7.2 Stabilità

Sia C un sistema olonomo a vincoli ideali, fissi, conservativo e di potenziale $U(q_1, q_2, ..., q_N)$: come è noto le posizioni di equilibrio sono fornite dal sistema 7.4.
Supponiamo ora che P^* sia tale posizione: si dice che la posizione P^* è di **equilibrio stabile** se, spostando sufficientemente "poco" il sistema C da P^*, e imprimendo una forza viva "piccola", risulta che C rimane "vicino" a P^* con forza viva che si mantiene analogamente "piccola".
Ovviamente tale concetto va precisato in termini rigorosi. Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^N$ delle configurazioni del sistema: in tale spazio, un punto $(q_1, q_2, ..., q_N)$ rappresenta una posizione del sistema, mentre una curva

$$q_h = q_h(t) \,, \qquad \text{con } t \in I \qquad \text{e} \qquad h = 1, ..., N$$

[2]Indicando con

$$\begin{bmatrix} j \\ ik \end{bmatrix} = \frac{1}{2} A_{jk} \left(\frac{\partial a_{hi}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_h} \right) ,$$

il **simbolo di Cristoffel** di seconda specie.

rappresenta un *moto* del sistema stesso. Data una posizione $P^*(q_1^*, ..., q_N^*)$, diremo *intorno* (di configurazioni) di centro P^* l'insieme

$$I_\eta = \left\{ (q_1, ..., q_N) \mid \sum_1^N (q_h - q_h^*)^2 < \eta^2 \right\} .$$

Possiamo precisare quindi la definizione di stabilità: si dice che la posizione di equilibrio P^* è **stabile** se, assegnati arbitrariamente due numeri $\epsilon, \eta > 0$, esistono in corrispondenza $\epsilon', \eta' > 0$ tali che, posto il sistema in $I_{\eta'}$ con forza viva minore di ϵ', il sistema rimane in I_η con forza viva minore di ϵ.

Vale il seguente teorema:

Teorema 7.1 (Teorema di Dirichlet) *Se P^* è un punto di massimo proprio per il potenziale $U^*(q_1, ..., q_N) \in C'$, allora P^* è una posizione di equilibrio stabile.*

Che P^* sia una posizione di equilibrio segue dall'essere

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_h} \right|_{(q^*)} = 0 , \qquad \forall\, h$$

dato che P^* è un punto di massimo.

Per quanto riguarda invece l'**instabilità**, sussiste il seguente teorema:

Teorema 7.2 (Teorema di Lyapunov)

1. *$P^*(q^*)$ è di equilibrio per un sistema conservativo di potenziale $U \in C^k$, con $k \geq 2$.*
2. *(q^*) non è un punto di massimo per U, ciò risulta dall'essere*

$$\sum_1^N \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \right|_{q^*} (q_h - q_h^*)(q_k - q_k^*)$$

definita positiva o indefinita.

$\Rightarrow$ *la posizione $P^*(q^*)$ è instabile.*

7.3 Piccole oscillazioni

Dato un sistema C olonomo a vincoli ideali, fissi e conservativo, sia $P^*(q^*)$ un punto di massimo del potenziale U, riconoscibile dal fatto che la forma quadratica

$$\sum_1^N \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}\bigg|_{q^*} (q_h - q_h^*)(q_k - q_k^*) \tag{7.9}$$

è definita negativa.
Si consideri lo sviluppo in serie di Taylor della funzione U:

$$U = U(q^*) + \sum_1^N \frac{\partial U}{\partial q_h}\bigg|_{q^*} (q_h - q_h^*) + \frac{1}{2}\sum_1^N \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}\bigg|_{q^*} (q_h - q_h^*)(q_k - q_k^*) + \dots$$

in cui il primo addendo è una (inessenziale) costante ed il secondo addendo è nullo. E' allora lecita la seguente approssimazione per U:

$$\bar{U} = \frac{1}{2}\sum_1^N \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}\bigg|_{q^*} (q_h - q_h^*)(q_k - q_k^*)\,, \tag{7.10}$$

ottenuta in base alla definizione di stabilità trascurando i termini del terzo ordine nelle $(q - q^*)$. La forza viva è invece

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^N a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k\,.$$

Sviluppando in serie di Taylor le $a_{hk}(q)$ si ottiene

$$a_{hk} = a_{hk}(q^*) + \sum_1^N \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_j}(q_j - q_j^*) + \dots$$

e quindi possiamo assumere per T il valore approssimato

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\sum_1^N a_{hk}(q^*)\dot{q}_h\dot{q}_k\,, \tag{7.11}$$

espressione in cui vengono trascurati termini del tipo $\dot{q}_h\dot{q}_k(q_j - q_j^*)$ — e superiori — in base alla definizione di stabilità dell'equilibrio.
Si può così definire per C un lagrangiano "ridotto" del tipo

$$\bar{L} = \bar{T} + \bar{U} \tag{7.12}$$

che porta alle seguenti equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_h} = 0 \qquad \text{con } h = 1, 2, ..., N \tag{7.13}$$

dette **equazioni delle piccole oscillazioni**.
Si tratta di equazioni lineari a coefficienti costanti. Posto infatti — per semplicità — $q_h^* = 0 \; \forall h$ e, posto

$$a_{hk}(0) = a_{hk}^0 \,, \qquad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}\right|_{(0)} = -c_{hk}^0 \,,$$

le 7.13 si riscrivono nella forma

$$\sum_1^N \left(a_{hk}^0 \ddot{q}_k + c_{hk}^0 q_k\right) = 0 \,. \tag{7.14}$$

In virtù del fatto che, sia $\sum_1^N a_{hk}^0 \dot{q}_h \dot{q}_k$ che $\sum_1^N c_{hk}^0 q_h q_k$, sono definite positive, si potrebbe dimostrare che esistono delle $(q_1', q_2', ..., q_N')$, dette *coordinate normali*, legate alle $(q_1, ..., q_N)$ da una trasformazione lineare

$$q_h = q_h(q_1', q_2', ..., q_N') \tag{7.15}$$

e tali che

$$\bar{U} = -\frac{1}{2}\sum_1^N \beta_h^2 \dot{q}_h'^2 \qquad e \qquad \bar{T} = \frac{1}{2}\sum_1^N \alpha_h^2 \dot{q}_h'^2 \,.$$

Ciò significa che le matrici $\left[a_{hk}^0\right]$ e $\left[c_{hk}^0\right]$ formate con i coefficienti che compaiono in 7.14 vengono diagonalizzate. Le equazioni delle piccole oscillazioni assumono così la forma

$$\alpha_h^2 \ddot{q}_h' + \beta_h^2 q_h' = 0 \tag{7.16}$$

e quindi, posto $\omega_h^2 = \beta_h^2/\alpha_h^2$, divengono

$$\ddot{q}_h' + \omega_h^2 q_h' = 0 \,, \tag{7.17}$$

le cui **soluzioni** sono oscillazioni armoniche

$$q_h' = A_h \cos(\omega_h t + B_h) \,. \tag{7.18}$$

Se le coordinate non sono normali, da 7.15 segue che esse possono esprimersi come combinazioni lineari di termini del tipo 7.18.

Si dicono infine **frequenze principali** delle piccole oscillazioni le

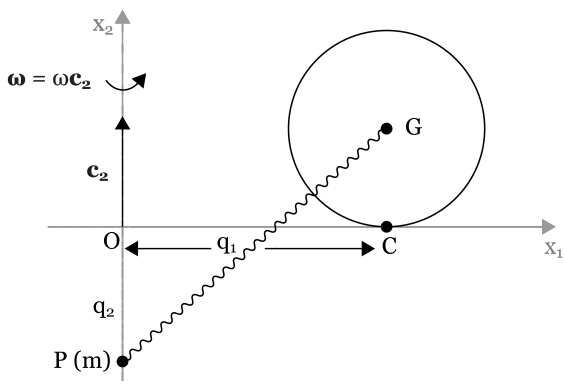
$$\partial_h = \frac{\omega_h}{2\pi} \,. \tag{7.19}$$

Osservazione

Nel seguito applicheremo la teoria delle piccole oscillazioni anche al caso di sistemi che presentano — accanto alle forze conservative — forze dipendenti dalle $\dot{q}$, a condizione che le loro componenti lagrangiane Q_h siano nulle per qualsiasi valore di h. In tal modo esse non compaiono nelle equazioni di Lagrange e non alterano la stabilità delle posizioni di equilibrio.

7.3.1 Esercizio 1

Ci sia un sistema composto da un disco omogeneo di massa m e raggio R, e da un punto P di massa M. Il disco rotola senza strisciare sull'asse x_1 ed il punto P è vincolato senza attrito sull'asse verticale ascendente x_2.



Il riferimento $(0, x_1, x_2)$ non è inerziale in quanto ruota con una velocità angolare costante $\vec{\omega} = \omega \mathbf{c_2}$. Le forze agenti sono il peso, la forza elastica f_e (esercitata dalla molla[3] che collega P e G) e le forze apparenti.
Quesito: date le coordinate lagrangiane indicate in figura, trovare le equazioni delle piccole oscillazioni in prossimità di un'eventuale posizione di equilibrio stabile.

Possiamo applicare la teoria delle *piccole oscillazioni*[4]:

$$U_p = -MGq_2\,, \qquad U_c = \frac{m\omega^2}{2} q_1^2$$

[3]La molla ha lunghezza naturale nulla.
[4]Lo studente verifichi che le forze di Coriolis hanno componenti lagrangiane nulle.

$$U_e = -\frac{h}{2}\left[q_1^2 + (q_2 - R)^2\right] = -\frac{h}{2}\left[q_1^2 + q_2^2 - 2Rq_2\right] + \text{cost}\,.$$

da cui si ottiene quindi il potenziale

$$U = \frac{1}{2}(m\omega^2 - h)q_1^2 - \frac{h}{2}q_2^2 + (hR - Mg)q_2\,.$$

Le posizioni di equilibrio si ricavano derivando il potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_1} &= (m\omega^2 - h)q_1 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad q_1^* = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial q_2} &= -hq_2 + (hR - Mg) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad q_2^* = \frac{hR - Mg}{h}\,, \end{aligned}$$

perciò esiste una sola posizione di equilibrio per il sistema:

$$P^*\left[0, \frac{hr - Mg}{h}\right].$$

Si tratta ora di verificare la stabilità.
Le derivate seconde nel punto P^* sono

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} = m\omega^2 - h\,, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\,, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} = -h\,, \tag{7.20}$$

si avrà quindi un massimo proprio del potenziale U se

$$\begin{vmatrix} m\omega^2 & 0 \\ 0 & -h \end{vmatrix} > 0\,, \qquad \text{ovvero se} \quad m\omega^2 - h < 0\,. \tag{7.21}$$

La condizione 7.21 assicura quindi che la posizione P^* è *stabile*: la forza elastica prevale sulla forza centrifuga[5].
Ricordando 7.20, l'espressione di $\bar{U}$ fornita da 7.10 diviene

$$\bar{U} = \frac{1}{2}\left[-(h - m\omega^2)q_1^2 - h(q_2 - q_2^*)^2\right]$$

e, poiché è evidente che

$$\bar{T} = T = \frac{3}{4}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}_2^2\,,$$

[5]Se invece $m\omega^2 - h > 0$, l'equilibrio è *instabile* per il teorema di Lyapunov.

le equazioni delle piccole oscillazioni diventano

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \frac{2(h-\omega^2 m)}{3m} q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \frac{h}{M}(q_2 - q_2^*) = 0 \end{cases}$$

Le coordinate sono *normali* e la soluzione segue immediatamente:

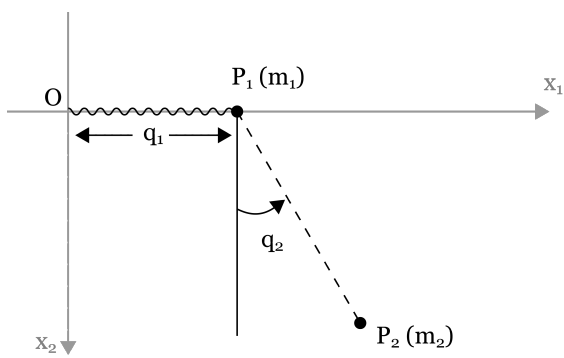
$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos\Big(\sqrt{\frac{2(h-\omega^2 m)}{3m}}\, t + B_1\Big) \\ q_2 &= q_2^* + A_2 \cos\Big(\sqrt{\frac{h}{M}}\, t + B_1\Big) \ . \end{aligned}$$

con $q_2^* = (hr - Mg)/h$.
Le frequenze principali sono

$$\partial_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2(h-\omega^2 m)}{3m}} \qquad \text{e} \qquad \partial_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h}{M}}\,.$$

7.3.2 Esercizio 2

Si consideri un sistema costituito da due punti — P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 — collegati da una sbarretta rigida di massa trascurabile e di lunghezza l. Le forze agenti sono la forza peso e la forza elastica esercitata dalla molla (di lunghezza naturale nulla e costante elastica h), mentre le coordinate lagrangiane sono indicate in figura.
Quesito: trovare le equazioni delle piccole oscillazioni in un intorno di una posizione di *equilibrio stabile*.



Analogamente a quanto fatto prima, il potenziale totale del sistema è

$$U = -\frac{h}{2}q_1^2 + m_2 g l \cos q_2 \,.$$

Le posizioni di equilibrio sono fornite da

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = -hq_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = -m_2 g l \sin q_2 = 0$$

e sono $P_1^*(0,0)$ e $P_2^*(0,\pi)$.
Le derivate seconde sono

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right|_{P_1} = -h\,, \qquad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right|_{P_1} = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right|_{P_1} = -m_2 g l\,, \tag{7.22}$$

da cui è evidente che $(0,0)$ è un punto di massimo per U e, dunque, $P_1^*(0,0)$ è proprio una posizione di equilibrio *stabile*[6]; l'energia cinetica del sistema è invece

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1 + \frac{1}{2}m_2\big[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\big]\,.$$

Se x_1 e x_2 sono le coordinate di P_2, valgono allora le relazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 + l\sin q_2 & \Rightarrow \quad \dot{x}_1 &= \dot{q}_1 + l\dot{q}_2\cos q_2 \\ x_2 &= l\cos q_2 & \Rightarrow \quad \dot{x}_2 &= -l\dot{q}_2\sin q_2 \end{aligned}$$

e, quindi,

$$T = \frac{1}{2}\big(m_1 + m_2\big)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2\,.$$

Poiché i coefficienti di $\bar{T}$ vanno calcolati con q_1^* e q_2^* nulli, seguirà che

$$\bar{T} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{q}_2 + m_2 l \dot{q}_1 \dot{q}_2\,.$$

Il valore di $\bar{U}$, ricavato da 7.22 e 7.10, è invece fornito da

$$\bar{U} = \frac{1}{2}\Big[-hq_1^2 - m_2 g l q_2^2\Big]$$

e le equazioni delle piccole oscillazioni saranno quindi

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2 l \ddot{q}_2 + hq_1 = 0 \\ \ddot{q}_1 + l\ddot{q}_2 + gq_2 = 0\,. \end{cases}$$

Come si vede, le coordinate q_1 e q_2 non sono normali[7].

[6] Si verifichi che $P_2^*(0,\pi)$ è *instabile*.
[7] Il calcolo delle frequenze principali è rimandato ai complementi e agli esercizi.

7.4 Complementi sulle piccole oscillazioni

Consideriamo un sistema olonomo a vincoli ideali (fissi) e conservativo: la posizione $\{q_h^*\}$ sia *stabile*[8] e ciò risulti dall'essere

$$\sum_1^N \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}\bigg|_0 q_h q_k$$

definita negativa.
Posto

$$a_{hk}(0) = a_{hk}^0 = a_{hk} \qquad \text{e} \qquad c_{hk} = -\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}\bigg|_{(0)'},$$

le equazioni delle piccole oscillazioni 7.14 si riscrivono

$$\sum_1^N (a_{hk}\ddot{q}_k + c_{hk}q_k) = 0 \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,. \tag{7.23}$$

Si tratta di un caso particolare del sistema omogeneo

$$\sum_1^N (a_{hk}\ddot{q}_k + b_{hk}\dot{q}_k + c_{hk}q_k) = 0 \tag{7.24}$$

e, mediante il noto procedimento risolutivo, si ricercano soluzioni del tipo

$$q_k = A_k e^{\lambda t} \qquad \text{con } k = 1, ..., N\,.$$

Sostituendo in 7.23 si ottiene il sistema

$$\sum_1^N A_k(a_{hk}\lambda^2 + c_{hk}) = 0\,,$$

cioé il *sistema caratteristico*: si otterranno soluzioni non banali *se e solo se* λ è radice di

$$\left|a_{hk}\lambda^2 + c_{hk}\right| = 0\,, \tag{7.25}$$

ovvero l'equazione caratteristica di grado $2N$ in λ o, se si preferisce, di grado N in λ^2.

[8] Per semplicità si assume $q_h^* = 0$, ottenibile con una trasformazione lineare.

Nel caso particolare delle piccole oscillazioni[9] ci si può convincere che risulta

$$\lambda_h^2 = -\omega_h^2 \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,, \tag{7.26}$$

cioé che tutte le radici di 7.25, quindi

$$\lambda_h = \pm i\omega_h \qquad \text{con } w_h > 0\,, \tag{7.27}$$

sono puramente immaginarie.
Infatti — procedendo con un ragionamento più fisico che matematico[10] — si supponga "per assurdo" che, per qualche k, sia

$$\lambda_k^2 = \alpha_k + i\beta_k$$

in ogni caso diverso da 7.26: nelle soluzioni del sistema (7.23) comparirebbero termini del tipo[11]

$$e^{\delta t}\,, \qquad \text{con } \delta > 0\,. \tag{7.28}$$

Ma questo evidentemente contraddice non solo la stabilità dell'equilibrio, ma la stessa conservazione dell'energia[12]!
Naturalmente qualche radice (7.26) potrebbe essere *multipla* e quindi, come avviene in generale per il sistema 7.24, potrebbero esservi soluzioni contenenti potenze intere positive di t; tuttavia questo è escluso — per le piccole oscillazioni — da un ragionamento (analogo al precedente) che ha portato ad escludere soluzioni esponenziali del tipo 7.28.

Ciò indica una via per determinare le frequenze principali anche senza introdurre coordinate normali. Le soluzioni della 7.26 forniscono infatti

$$\partial h = \frac{\omega_h}{2\pi} \qquad \text{con } h = 1, ..., N$$

che sono, appunto, le *frequenze principali*[13].
Nel caso in cui le ω_h corrispondano a radici multiple di 7.26, le ω_h vengono dette *frequenze degeneri*.

[9] Si procederà qui in modo intuitivo.
[10] Si veda altrimenti *Gantmacher* Cap. VI, paragrafo 40-41.
[11] Esprimendo λ^2 in forma trigonometrica si avrebbe $\lambda^2 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e quindi $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\rho}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$ etc.
[12] Anche in $\dot{q}_k$ compare un termine $e^{\delta t}$!
[13] In vari testi le stesse ω_h vengono dette "frequenze principali".

7.5 Esempi vari

7.5.1 Ricavare le frequenze principali

In riferimento all'esercizio 7.3.2, posto $m_1 = m_2$ si hanno le seguenti equazioni delle piccole oscillazioni:

$$\begin{cases} 2m\ddot{q}_1 + ml\ddot{q}_2 + hq_1 = 0 \\ \ddot{q}_1 + l\ddot{q}_2 + gq_2 = 0\,. \end{cases}$$

Sostituendo $q_1 = Ae^{\alpha t}$ e $q_2 = \beta e^{\alpha t}$, l'equazione caratteristica diventa

$$\begin{vmatrix} 2m\lambda^2 + h & ml\lambda^2 \\ \lambda^2 & l\lambda^2 + g \end{vmatrix} = 0\,,$$

ovvero

$$ml\lambda^4 + \lambda^2(2mg + hl) + hg = 0\,,$$

da cui segue

$$\lambda^2 = -\frac{(2mg + hl) \pm \sqrt{4m^2g^2 + h^2l^2}}{2ml}\,.$$

E' evidente che, posto[14]

$$\omega_{1,2} = \frac{(2mg + hl) \pm \sqrt{4m^2g^2 + h^2l^2}}{2ml} > 0\,,$$

le frequenze principali sono

$$\partial_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \qquad \text{e} \qquad \partial_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}\,.$$

7.5.2 Forze elastiche

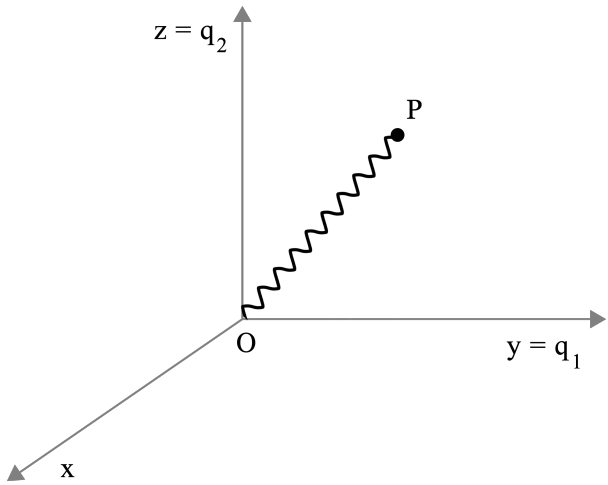
Il punto P di massa m è soggetto ad una forza elastica con centro in O, origine del sistema inerziale $(0, x, y, z)$: il moto è dunque centrale e piano[15].

Da

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \qquad \text{e} \qquad U = -\frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)\,,$$

[14] Ovviamente se $a > 0$ e $b > 0$, $a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$.

[15] Ovviamente quanto spiegato può essere generalizzato al caso di *due corpi isolati* di masse M e m, collegati da una molla, etc.



le equazioni di Lagrange sono[16]

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \frac{h}{m} q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \frac{h}{m} q_2 = 0\,. \end{cases}$$

E' evidente dunque che le frequenze principali coincidono:

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h}{m}} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \left(\text{con } \omega = \sqrt{\frac{h}{m}}\right),$$

un ovvio caso di *frequenza degenere*.

La traiettoria di ogni P soggetto ad una forza elastica attrattiva è un'*ellisse* di centro O (eventualmente degenere in un segmento). Infatti la soluzione del sistema precedente è

$$\begin{cases} q_1 = a\cos(\omega t + \theta) \\ q_2 = b\cos(\omega t + \psi) \end{cases} \tag{7.29}$$

con a, b, θ, ψ arbitrari.Facilmente risulta

$$\begin{cases} \frac{q_1}{a} = \cos\omega t\cos\theta - \sin\omega t\sin\theta \\ \frac{q_2}{b} = \cos\omega t\cos\psi - \sin\omega t\sin\psi \end{cases} \tag{7.30}$$

e dunque, se

$$\theta - \psi \neq k\pi \qquad (\text{con } k \text{intero})\,,$$

[16] Oscillazioni intorno alla posizione stabile O.

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi & -\sin\psi \end{vmatrix} = \sin(\theta - \psi) \neq 0\,.$$

Ricavando quindi da 7.30 $\cos\omega t$ e $\sin\omega t$, quadrando e sommando si ottiene

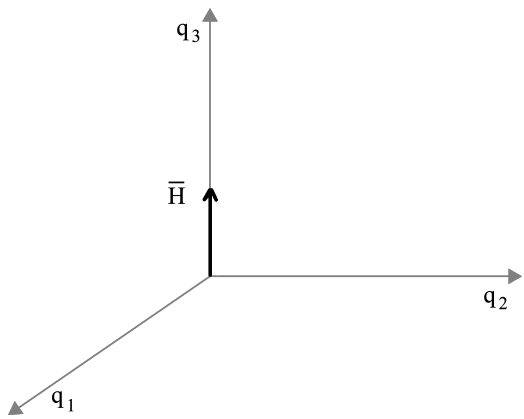
$$\frac{q_1^2}{a^2} + \frac{q_2^2}{b^2} - \frac{2\cos(\theta-\psi)}{ab} q_1 q_2 = \sin^2(\theta - \psi)\,,$$

che rappresenta un'ellisse[17] di centro O la quale — è evidente — degenera in un segmento per $(\theta - \psi) = k\pi$.

7.5.3 Carica in campo magnetico

Una particella carica si muove in un campo magnetico costante H. Sulla particella, di massa m e carica e, supponiamo agisca la *sola* forza di Lorentz

$$\mathbf{F_L} = e\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}\,.$$



Non essendo limitativo assumere l'asse q_3 parallelo ad $\mathbf{H}$, proiettando $m\mathbf{a} = \mathbf{F_L}$ si ottiene[18]

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 - \alpha\dot{q}_2 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \alpha\dot{q}_1 = 0 \\ \ddot{q}_3 = 0 \end{cases} \tag{7.31}$$

da risolvere mediante le condizioni iniziali

$$q_i(0) = q_i^0 \qquad , \qquad \dot{q}_i(0) = \dot{q}_i^0 \qquad \text{con } i = 1, 2, 3\,.$$

[17] E' una conica con tutti i punti al finito.
[18] Con $\alpha = \frac{eH}{m}$.

La terza equazione del sistema 7.31 fornisce subito

$$q_3 = \dot{q}_3^0 t + q_3^0 \tag{7.32}$$

e, sostituendo in $7.31_{1,2}$ soluzioni del tipo $q_1 = Ae^{\alpha t}$ e $q_2 = Be^{\alpha t}$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A\lambda^2 - \alpha\lambda B = 0 \\ A\alpha\lambda + B\lambda^2 = 0 \end{cases}$$

con equazione caratteristica

$$\lambda^4 + \alpha^2\lambda^2 = 0$$

di radici $\lambda_{1,2} = 0$ (doppia) e $\lambda_{3,4} = \pm i\alpha$.
A $\lambda_1 = 0$ corrisponde la soluzione

$$(A_1 e^{0t}, B_1 e^{0t}) = (A_1, B_1)$$

arbitrari, mentre a $\lambda_2 = 0$ (zero doppio) corrisponde una soluzione del tipo

$$\Big((at + b)e^{0t}, (a't + b')e^{0t}\Big)$$

che, sostituita in $7.31_{1,2}$, fornisce

$$a = a' = 0\,.$$ [19]

Ne viene che a λ_2 corrisponde una soluzione $(A_2 = b, B_2 = b')$ con A_2 e B_2 arbitrari. La ricerca di soluzioni per $\lambda_{3,4}$ non presenta difficolta.
Potremo allora assumere

$$\begin{array}{lclcl} \lambda_1 & = & 0 & \rightarrow & (1,0) \\ \lambda_2 & = & 0 & \rightarrow & (0,1) \\ \lambda_3 & = & i\alpha & \rightarrow & -i(\cos\alpha t + i\sin\alpha t, \cos\alpha t + i\sin\alpha t) \\ \lambda_4 & = & -i\alpha & \rightarrow & i(\cos\alpha t - i\sin\alpha t, \cos\alpha t - i\sin\alpha t) \end{array}$$

e quindi, in forma reale,

$$\begin{array}{lcl} \lambda_1 & \rightarrow & (1,0) \\ \lambda_2 & \rightarrow & (0,1) \\ \lambda_3 & \rightarrow & (-\cos\alpha t, \sin\alpha t) \\ \lambda_4 & \rightarrow & (\sin\alpha t, \cos\alpha t)\,. \end{array}$$

[19] Quindi, in questo caso, non compaiono termini lineari in t in corrispondenza di radici doppie.

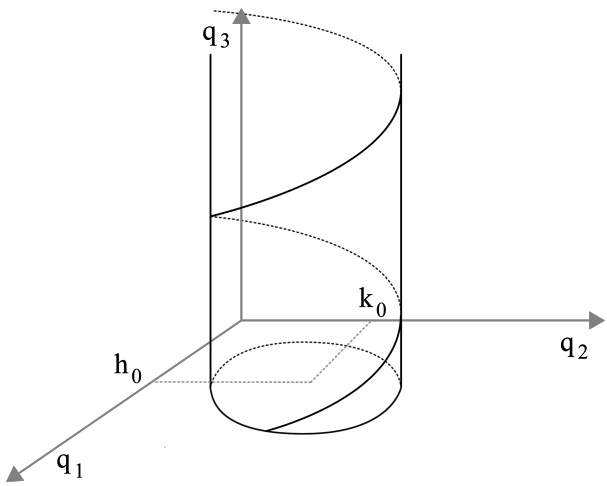
L'integrale generale del sistema è allora

$$\begin{cases} q_1 = c_1 - c_3 \cos \alpha t + c_4 \sin \alpha t \\ q_2 = c_2 + c_3 \sin \alpha t + c_4 \cos \alpha t \\ q_3 = \dot{q}_3^0 t + q_3^0 \ . \end{cases}$$

e, esprimendo c_1, c_2, c_3, c_4 in funzione delle condizioni iniziali, è facile trovare

$$\begin{aligned} q_1 &= (q_1^0 + \frac{\dot{q}_2^0}{\alpha}) - \frac{\dot{q}_2^0}{\alpha} \cos \alpha t + \frac{\dot{q}_1^0}{\alpha} \sin \alpha t \\ q_2 &= (q_2^0 + \frac{\dot{q}_1^0}{\alpha}) + \frac{\dot{q}_2^0}{\alpha} \sin \alpha t + \frac{\dot{q}_1^0}{\alpha} \cos \alpha t \\ q_3 &= \dot{q}_3^0 t + q_3^0 \end{aligned} \tag{7.33}$$

Si può facilmente vedere che la traiettoria della carica è un'*elica cilindrica*.



Infatti, posto in $7.33_{1,2}$

$$h_0 = \dot{q}_1^0 + \frac{\dot{q}_2^0}{\alpha} \qquad \text{e} \qquad k_0 = \dot{q}_2^0 - \frac{\dot{q}_1^0}{\alpha} \ ,$$

quadrando e sommando segue

$$(q_1 - h_0)^2 + (q_2 - k_0)^2 = \frac{\dot{q}_1^{0^2} + \dot{q}_2^{0^2}}{\alpha^2} \ .$$

Il raggio

$$R = \frac{\sqrt{\dot{q}_1^{0^2} + \dot{q}_2^{0^2}}}{\alpha}$$

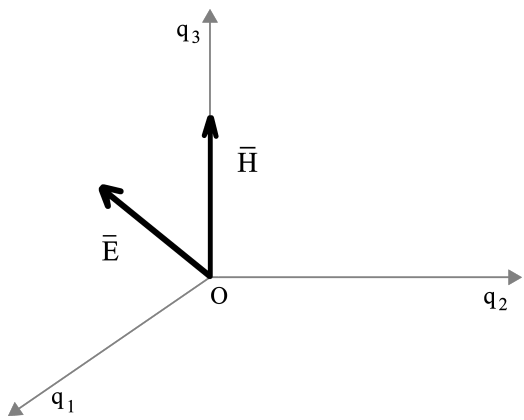
è il **raggio di Larmor**: una particella carica in un campo magnetico — per esempio quello galattico — descrive quindi una elica cilindrica tanto più ampia quanto maggiore è la componente della velocità normale al campo magnetico.

Esercizio

Nel problema precedente si aggiunga un campo elettrico costante $\mathbf{E}$: in tal modo la forza agente è

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{H}) \, .$$

Suggerimento: per semplicità — e non sarà limitativo — si assuma il riferimento $(0, q_1, q_2, q_3)$ con q_3 parallelo ad $\mathbf{H}$, mentre $\mathbf{E}$ sia parallelo a $(0, q_1, q_3)$ ecc.



Esercizio

Si risolva il sistema 7.25 con lo stesso metodo usato per il pendolo di Focault.
Suggerimento: moltiplicando per i la seconda delle 7.25, sommando e ponendo $u = q_1 + iq_2$, risulta

$$\ddot{q}_1 + i\ddot{q}_2 + i\alpha(\dot{q}_1 + i\dot{q}_2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{u} + i\alpha\dot{u} = 0$$

$$\lambda^2 + i\alpha\lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0\,, \;\; \lambda_2 = -i\alpha$$

$$u = q_1 + iq_2 = (c_1 + ic_2)e^{0t} + (c_3 + ic_4)e^{-i\alpha t}$$

e tutto diventa più facile.

Osservazione

Fisicamente il risultato è solo approssimato. Cosa succede se una carica è accelerata?

Capitolo 8

Principi variazionali

8.1 Equivalenza della condizione variazionale

I risultati che seguiranno sono di primario interesse per la Fisica Matematica ma, anzitutto, rappresentano dei risultati di Analisi.
Consideriamo una funzione[1]

$$L(q_h, \dot{q}_h, t) \qquad \text{con } h = 1, ..., N \tag{8.1}$$

che non si riferisce necessariamente ad un sistema meccanico e, anzi, t potrebbe pure non essere una variabile temporale: i risultati a cui giungeremo saranno validi anche con tale generalità.

Qui converrà comunque pensare a L come al lagrangiano di un sistema di coordinate $\{q_1, ..., q_N\}$ la cui evoluzione (o moto) è regolato dalle equazioni di Lagrange:

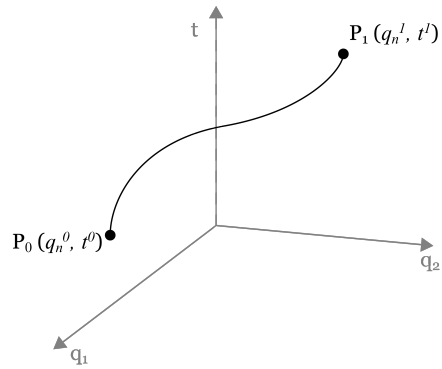
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,. \tag{8.2}$$

Si consideri lo spazio *ampliato* delle configurazioni $\mathbb{R}^{N+1}$ $(q_1, q_2, ..., q_N, t)$ e siano $P_0(q_h^0, t_0)$ e $P_1(q_h^1, t_1)$ punti rappresentativi delle posizioni e degli istanti iniziali e finali del moto.

La curva regolare

$$\begin{cases} t = t \qquad t_0 \leq t \leq t_1 \\ \\ q_h = q_h(t) \in C^2_{[t_0,t_1]} \end{cases} \tag{8.3}$$

[1] Un lagrangiano generalizzato.



(con $q_h(t_0) = q_h^0$ e $q_h(t_1) = q_h^1$) rappresenta una "traiettoria" nello spazio $\mathbb{R}^{N+1}$ a cui corrisponde un moto $\{q_h = q_h(t)\}$ nello spazio ordinario $\mathbb{R}^N$ delle configurazioni.
Si dice che la 8.3 è una "traiettoria rettilinea"[2] se le $q_h(t)$ di 8.3 soddisfano le equazioni di Lagrange 8.2 per $[t_0, t_1]$, ovvero se definiscono il "moto" effettivo del sistema.

Si vuole ora caratterizzare le traiettorie rettiline — ovvero i moti effettivi — mediante una *condizione variazionale*. Allo scopo si consideri il funzionale

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{8.4}$$

che si dirà **azione Hamiltoniana**.

Si consideri ora una famiglia arbitraria di traiettorie

$$\begin{cases} t = t\,, & t_0 \le t \le t_1 \\ q_h = q_h(t, \alpha) \in C^2\,, & -l < \alpha < l \end{cases} \tag{8.5}$$

aventi estremi assegnati P_0 e P_1 e sia

$$q_h(t_0, \alpha) = q_h^0\,, \qquad q_h(t_0, \alpha) = q_h^1 \qquad \forall \alpha \in (-l, l)\,.$$

Calcolando 8.4 per una traiettoria generica risulta

$$W = W(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L\Big(q_h(t, \alpha), \dot{q}_h(t, \alpha), t\Big)dt\,, \tag{8.6}$$

[2] Ma attenzione, non si tratta di una retta.

che è una funzione di α in $(-l, l)$. W si dice allora *funzionale* perché è funzione di una "curva", quella corrispondente al parametro α (vedi 8.5). Si definirà poi **variazione del funzionale** W — per la generica traiettoria — il differenziale[3]

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \alpha}\delta\alpha \tag{8.7}$$

e, in seguito, considereremo che la traiettoria rettilinea corrisponda al valore $\alpha = 0$ $[q_h(t) = q_h(t, 0)]$.
Calcoliamo la variazione per un α generico:

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_h}\delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\delta \dot{q}_h \right] dt\,, \tag{8.8}$$

in cui deve intendersi

$$\delta q_h = \frac{\partial q_h(t,\alpha)}{\partial \alpha}\delta\alpha\,, \qquad \delta\dot{q} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{dq_h}{dt}\delta\alpha = \frac{d}{dt}\delta q_h\,. \tag{8.9}$$

Dalle due ultime relazioni segue che

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_h}\delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\frac{d}{dt}\delta q_h \right) dt$$

e, integrando per parti il secondo termine dell'integrale,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\frac{d}{dt}\delta q_h &= \left[\sum_1^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\delta q_h \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^N \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\delta q_h dt \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} \sum_1^N \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\delta q_h dt\,, \end{aligned}$$

[3]**Nota:** si può procedere anche come segue: sia $(t, q_h = \bar{q}_h(t))$ una traiettoria assegnata e $\{\delta q_h(t)\}$ una N-upla di arbitrarie funzioni che appartengono a $C'[t_0, t_1]$ e tali che

$$\delta q(t_0) = \delta q_h(t_1) = 0\,, \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,.$$

Si consideri ora la famiglia (ad un parametro) con $\delta q_h(t)$ arbitrari — nulli per $t = t_0$ e $t = t_1$ — composta da

$$q_h(t, \alpha) = \bar{q}_h(t) + \alpha\delta q_h\,, \qquad h = 1, ..., N$$

cosicché $\bar{q}(t)$ corrisponda al valore $\alpha = 0$. Si dirà allora **variazione prima**:

$$\delta W = \left.\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \delta\alpha\,.$$

il cui termine $\left[\sum_1^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\delta q_h\right]_{t_0}^{t_1}$ è nullo in quanto i δq_h sono nulli in t_0 e t_1, $\forall\alpha$.
Segue in definitiva

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^N -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h}\right)\delta q_h dt\,. \tag{8.10}$$

E' allora evidente che, se per $\alpha = 0$ si ha una traiettoria rettilina, allora risulta

$$\delta W = 0 \tag{8.11}$$

e questo si esprime dicendo che su tale traiettoria l'azione è *stazionaria.* Viceversa, se per un $\bar{\alpha}$ (qui α=0) l'azione è stazionaria, e quindi vale la 8.11, allora la corrispondente traiettoria è rettilinea, ovvero le $\{q_h(t = q_h(t, 0)\}$ soddisfano le equazioni di Lagrange. Si può dimostrare cioè (vedi 8.10) che il fatto che per una traiettoria sia

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^N -(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h})\delta q_h dt = 0$$

implica

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0\,, \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,,$$

e ciò segue dall'arbitrarietà delle δq_h (come verrà dimostrato più avanti negli esercizi).

Da quanto visto segue ora il principio di Hamilton:

Teorema 8.1 (Principio di Hamilton) I) *Le traiettorie rettilinee sono caratterizzate dal rendere stazionaria l'azione Hamiltoniana W;*

II) *Tra le traiettorie possibili — di assegnati estremi $P_0(t_0, q_h^0)$ e $P_1(t_1, q_h^1)$ — quella che corrisponde al moto effettivo è caratterizzata dal rendere stazionaria l'azione W.*

Per essere più espliciti, dato il funzionale

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)dt\,,$$

e considerata la traiettoria di estremi assegnati (t_0, q_h^0) e (t_1, q_h^1),

$$\delta \int_{t_0}^{t^1} Ldt = 0 \tag{8.12}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0\,, \qquad \text{con } h = 1, ..., N \\ q_h(t_0) = q_h^0\,, \qquad q_h(t_1) = q_h^1 \end{cases} \tag{8.13}$$

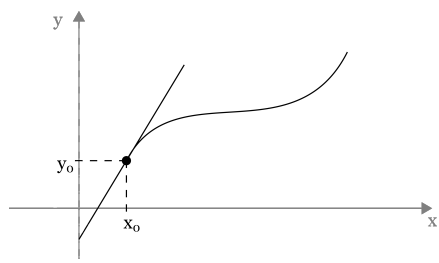
Le equazioni 8.13 si dicono **equazioni di Eulero-Lagrange**[4] associate alla condizione variazionale 8.12.
Da 8.12 e 8.13 si ricava che per determinare le traiettorie di stazionarietà di $W = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ occorre risolvere il problema analitico 8.13, che è un problema di *Sturm-Liouville*, ovvero la soluzione $\{q_h(t)\}$ deve soddisfare le condizioni "ai limiti" 8.13_2.
Per maggiore chiarezza si consideri una sola equazione del tipo

$$y'' = F(x, y, y')$$

e si confrontino i due casi seguenti.

Problema di Cauchy

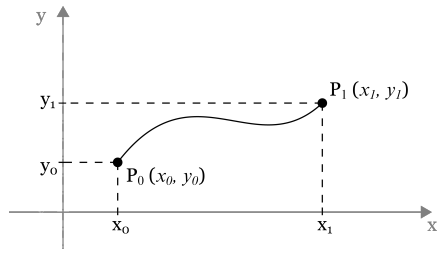
Determinare[5] la soluzione $y(x)$ tale che $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$.



Problema di Sturm-Liouville

Determinare[6] la soluzione $y(x)$ tale che $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$.

[4]Si dicono senz'altro *equazioni di Lagrange* se il problema è Meccanico.
[5]Sono ben note le condizioni di esistenza ed unicità per questo problema.
[6]Qui l'Analisi è più complicata (riguardo all'esistenza ed unicità) ma ammetteremo che la natura del problema — meccanica o geometrica — assicuri l'esistenza e l'unicità delle soluzioni.

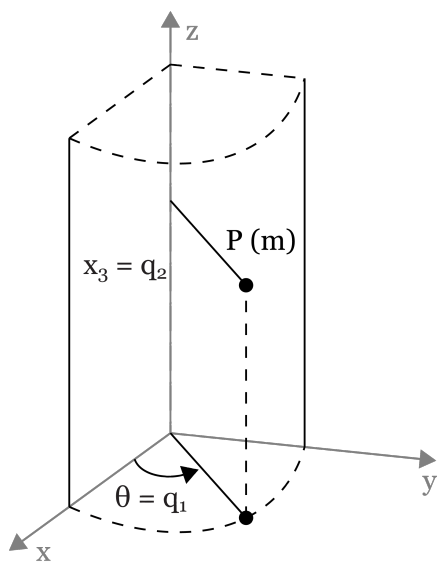


Conclusione

L'equivalenza tra la condizione variazionale 8.12 e le equazioni 8.13 mostra come il principio di Hamilton possa assumersi come *principio base* della Meccanica Analitica per i sistemi classici, ma, per la sua generalità, può essere utilizzato in ambiti fisici diversi, ad esempio in Relatività.
Si ricordi inoltre che la funzione $L(q, \dot{q}, t)$ è generica, pertanto il risultato indicato da 8.12 e 8.13 rappresenta un teorema di matematica pura.

8.1.1 Un semplice esempio meccanico

Si consideri il caso riportato in figura: un punto di massa m è vincolato senza attrito su un cilindro rotondo, di raggio R e generatrici parallele a z, ed è soggetto alla forza peso. Assunte come coordinate lagrangiane le



coordinate cilindriche $q_1 = \theta$ e $q_2 = z$, e scritto il Lagrangiano del sistema L, si risolva ora il problema variazionale

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \,,$$

essendo gli estremi $P_0(t_0 = 0, 0, z_0)$ e $P_1(t_1, \theta_1, z_1)$.

Come è evidente

$$L = \frac{1}{2} m \big[R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \big] - mgz$$

e quindi il problema variazionale equivale alle equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2 \ddot{\theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} + mg = 0 \end{cases}$$

con le condizioni

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \,, \qquad z(0) = z_0 \\ \\ \theta(t_1) = \theta_1 \,, \qquad z(t_1) = z_1 \,. \end{cases}$$

L'integrale generale delle equazioni di Lagrange è

$$\begin{cases} \theta = \alpha t + \beta \\ z = -g \frac{t^2}{2} + \gamma t + \delta \end{cases}$$

e, sempre dalle condizioni ai limiti, si ottiene

$$\theta(0) = \theta_0 = 0 = \beta \,, \;\; z_0 = \delta \qquad \text{e} \qquad \delta_1 = \alpha t_1 \,, \;\; z_1 = -g \frac{t_1^2}{2} + \gamma t_1 + z_0 \,.$$

Si trova dunque la soluzione

$$\begin{cases} \theta = \frac{\theta_1}{t_1} t \\ z = -g \frac{t^2}{2} + \frac{z_1 - z_0 + g \frac{t_1^2}{2}}{t_1} t + z_0 \,, \end{cases}$$

mentre, in assenza della forza peso, la soluzione sarebbe stata

$$\begin{cases} \theta = \frac{\theta_1}{t_1} t \\ z = \frac{z_1 - z_0}{t_1} t + z_0 \,. \end{cases}$$

In coordinate cartesiane si ha dunque

$$\begin{cases} x = R\cos\frac{\theta_1}{t_1}t \\ y = R\sin\frac{\theta_1}{t_1}t \\ z = \frac{z_1-z_0}{t_1}t + z_0 \end{cases},$$

che rappresenta un'elica cilindrica passante per $P_0'(0, z_0)$ e $P_1'(\theta_1, z_1)$.

8.2 Alcuni esempi di problemi che hanno dato origine al calcolo variazionale

8.2.1 Problema della superficie di rotazione che ha area minima

Tra tutte le curve regolari $y = y(x)$ di estremi $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ trovare quella che, con una rotazione completa attorno all'asse x, genera la *superficie di area minima*.
Nella nota conclusiva di questo capitolo si farà un cenno su cosa si intende per minimi (o massimi) per un funzionale, e si dimostrerà che — condizione necessaria per l'esistenza di un estremo per il funzionale W — è che

$$\delta W = 0\,,$$

ovvero che sia *stazionario*[7].
Si tratta — tornando al problema specifico — di trovare la curva

$$y = y(x)\,,$$

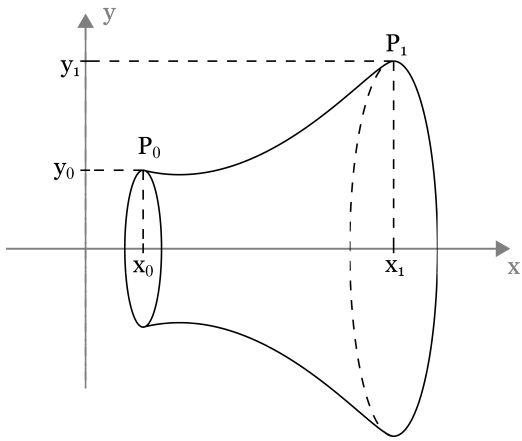
con $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, in modo che il funzionale[8]

$$I(y) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}dx$$

sia stazionario, ovvero risulti

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}dx = 0\,. \tag{8.14}$$

[7] Per ora ci limiteremo a questo caso.
[8] Si veda la parte relativa alle area della superficie di rotazione incontrata nei corsi di Analisi Matematica.



Applicando quanto visto nel paragrafo precedente ($q = y, \dot{q} = y', t = x$), si arriva a $L(q, \dot{q}, t) = y\sqrt{1 + y'^2}$ e la condizione variazionale 8.14 equivale all'unica equazione di Eulero-Lagrange[9]:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}\left(y\sqrt{1 + y'^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y\sqrt{1 + y'^2}\right) = 0$$

con le condizioni ai limiti $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$. Qui non converrà risolvere tale equazione (del 2° ordine in y), ma si può notare che

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} y\sqrt{1 + y'} = 0\,.$$

Vale quindi l'integrale primo

$$H = \frac{\partial L}{\partial y'} y' - L = \text{cost}\,.$$

Ne viene che

$$\frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - y\sqrt{1 + y'^2} = \text{cost}\,,$$

riconducibile a

$$\frac{y}{q + y'2} = c_1\,, \tag{8.15}$$

dove c_1 è una costante arbitraria. Posto $y' = \sin ht$, segue che

$$y = c_1\sqrt{1 + \sin^2 ht} = c_1 \cos ht$$

[9] Vedi 8.13.

e, quindi,

$$dx = \frac{dy}{y'} = c_1 \frac{\sin ht}{\sin ht} dt = c_1 dt\,.$$

Otteniamo allora la generale curva integrale dell'equazione 8.15

$$\begin{cases} x = c_1 t + c_2 \\ y = c_1 \cos ht \end{cases}$$

e, eliminando t, si arriva a

$$y = c_1 \cos h \frac{x - c_2}{c_1}\,,$$

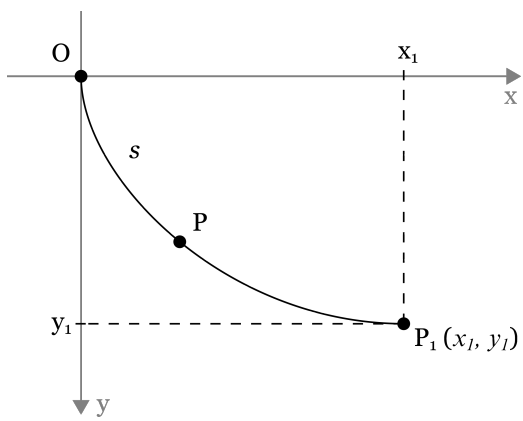
che rappresenta la soluzione generale voluta.
Occorre ora determinare le costanti c_1 e c_2 in base alle condizioni ai limiti $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$: la curva che si troverà[10] sarà una *catenaria*.

8.2.2 Il problema della brachistocrona

Su un piano verticale $(0, x, y)$, dove y è la verticale discendente, giace una guida di equazione

$$y = y(x) \qquad (0 \leq x \leq x_1)$$

con $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$ o, in altre parole, di estremi $O(0,0)$ e $P_1(x_1, y_1)$.



[10] Tranne casi speciali si troverà una — ed una sola — soluzione.

Un punto pesante vincolato senza attrito sulla guida parte da O con velocità iniziale $v(0) = 0$.
Si tratta di trovare la "forma" della guida — la sua equazione $y = y(x)$ — tale che il tempo impiegato dal punto per arrivare in $P_1(x_1, y_1)$ sia minimo.

Troveremo anzitutto il tempo di percorrenza per una guida generica avente come estremi quelli assegnati. Vale allora l'integrale dell'energia

$$T - U = E_0 \qquad \Rightarrow \qquad E_0 = \frac{1}{2}mv(0)^2 - mg0 = 0\,.$$

Se s è l'arco OP sulla generica curva, e $v = ds/dt$, l'integrale dell'energia fornisce

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - mgy = 0\,.$$

In definitiva, ricavando

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2y}}\sqrt{\frac{ds^2}{y}}\,, \qquad \text{con } ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1 + y'^2)dx^2\,,$$

si arriva a

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2y}}\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}dx\,,$$

quindi il tempo impiegato a raggiungere P_1 (lungo $y = y(x)$) è

$$t[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}dx\,.$$

Limitiamoci ora a trovare la curva che renda stazionario il funzionale $t[y]$, tale cioé che

$$\delta\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}dx = 0\,.$$

Qui $L(q, \dot{q}, t) = L(y, y', x) = \sqrt{\left(1 + y'^2\right)/y}$ e quindi l'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} - \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{1 + y'}{y}} = 0\,,$$

con la condizione ai limiti $y(0) = 0$ e $y(x_1) = y_1$. Anche in questo caso non conviene affrontare tale equazione, infatti si nota che

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{\partial L}{\partial y'}y' - L = \text{cost}\,,$$

ovvero

$$\frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} = \text{cost} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{c_1}}$$

(dove c_1 è una costante arbitraria positiva) o, ancora,

$$y(1+y'^2) = c_1 \qquad \Rightarrow \qquad y'^2 = \frac{c_1 - y}{y} \qquad \Rightarrow \qquad y' = \sqrt{\frac{c_1 - y}{y}}\,. \tag{8.16}$$

Separando le variabili e integrando si arriva a

$$\int \sqrt{\frac{y}{c_1 - y}}dy = \int dx = x + c_2$$

e, per trovare il primo integrale, si ponga $y = c_1 \sin^2\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{y}{c_1 - y}}dy &= \int \frac{\sqrt{c_1}\sin^2\theta}{\sqrt{c_1}\sqrt{1-\sin^2\theta}}2c_1 \sin\theta\cos\theta\, d\theta \\
&= 2c_1 \int \sin^2\theta\, d\theta = 2\frac{c_1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) \\
&= \frac{c_1}{2}(2\theta - \sin 2\theta)\,.
\end{aligned}$$

In definitiva si ha

$$\begin{cases} x + c = \frac{c_1}{2}(2\theta - \sin 2\theta) \\ y = c_1 \sin^2\theta = \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2\theta) \end{cases} \tag{8.17}$$

che è l'integrale generale in forma parametrica dell'equazione 8.16.
La condizione di passaggio per $(0,0)$ implica $c_2 = 0$, mentre c_1 si determina mediante la condizione di passaggio per $P_1(x_1, y_1)$, cioé

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{c_1}{2}(2\theta_1 - \sin 2\theta_1) \\ y_1 &= \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2\theta_1) \ , \end{aligned}$$

da cui è possibile ricavare θ_1[11] e c_1. La curva è una **cicloide**[12].

8.2.3 Il Principio di Fermat

Ricordando il principio di Hamilton — che è un risultato matematico più generale di analisi variazionale — è noto che la condiziona variazionale

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \tag{8.18}$$

equivale alle equazioni di Eulero-Lagrange

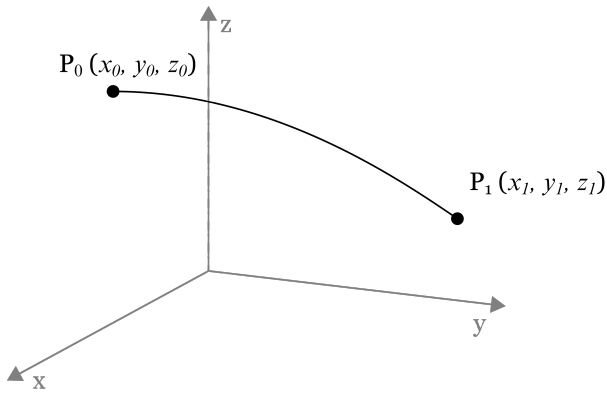
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \\ q_h(0) = q_h^0 \, , q_h(t_1) = q_h^1 \, . \end{cases} \tag{8.19}$$

Come ulteriore applicazione si ricordi il **principio di Fermat**: la traiettoria di un "raggio di luce", tra punti prefissati in un mezzo qualsiasi, è quella che rende *minimo*[13] il tempo di percorrenza.
Si consideri un mezzo non omogeneo e sia $v = v(x, y, z)$ la velocità della luce nel punto (x, y, z).

[11] $\theta_1 = \arcsin \sqrt{\frac{y_1}{c_1}}$.

[12] Nota storica: già Galileo Galilei notò che una sfera arriva prima rotolando lungo un arco di cerchio piuttosto che sulla corda relativa. Il problema fu riproposto per la prima volta in forma rigorosa da Bernoulli, nel 1697. Nell'introdurre il problema Bernoulli riportava il fatto che esso si presentava arduo anche a quei naturalisti "*che avevano ampliato la matematica con teoremi che non erano conosciuti a nessuno*". E' evidente l'allusione a Newton, il quale aveva dato inizio tre anni prima alla disputa (Newton-Leibniz) sulla paternità del calcolo infinitesimale, disputa nella quale Bernoulli fu un convinto sostenitore di Leibniz. Bernoulli fece circolare il problema in Europa e, di lì a poco, gli arrivarono due risposte giuste: una da de l'Hopital (in realtà scritta da Bernoulli stesso) e una proveniente dall'Inghilterra, senza firma. Bernoulli riconobbe subito in Newton l'autore. Si attribuisce a Bernoulli l'esclamazione "*adgnosco ex ungue leonem!*".
Pochi anni fa, nel 2006, vennero poi ritrovati gli atti della Royal Society relativi al periodo 1661-1682 e si scoprì che il primo che risolse correttamente e formalmente il problema fu l'inglese Robert Hook — lo stesso che formalizzò la legge di proporzionalità tra l'estensione di una molla e la sua forza di richiamo.

[13] Stazionario, basterà.



Lungo la traiettoria $\gamma_{P_0 P_1}$ si ha

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\,, \qquad dt = \frac{ds}{v}$$

e quindi $T = \int_\gamma ds/v$ è il tempo impiegato.
Sia

$$\begin{cases} y = y(x) & x_0 \le x \le x_1 \\ z = z(x) \end{cases}$$

la generica traiettoria di estremi P_0 e P_1: poiché

$$ds = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}dx \qquad (ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2)\,,$$

il tempo è impiegato è

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z)} dx$$

ed il principio di Fermat, limitatamente alla stazionarietà, si esprime come

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z)} dx = 0\,. \tag{8.20}$$

In questo caso

$$L(x, y, y', z, z') = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}/v(x, y, z)\, dx$$

è la condizione variazionale e conduce alle equazioni che seguono[14] (vedi 8.19):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{y'}{v^2(x,y,z)} &= 0 \\ \frac{d}{dx}\frac{z'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{z'}{v^2(x,y,z)} &= 0\,, \end{aligned} \tag{8.21}$$

con le condizioni

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0\,, y(x_1) = y \\ z(x_0) = z_0\,, z(x_1) = z_1\ . \end{cases}$$

Propagazione dei raggi di luce nell'atmosfera

Analizziamo ora un problema più semplice, quello della propagazione luminosa nell'atmosfera terrestre. Si considerino — con buona approssimazione — i seguenti dati:

$$v = \frac{c}{n}\,, \qquad \text{dove } n = n_0\left(1 - \frac{kz}{h}\right) \text{ è l'indice di rifrazione}\,,$$

z la quota verticale, h l'altezza dell'atmosfera e n_0, k due costanti. Si ha pertanto

$$v(z) = \frac{c}{n_0(1-\frac{kz}{h})}\,, \tag{8.22}$$

che dipende quindi dalla sola quota verticale z.
Pensiamo quindi al moto piano di un fotone che passi tra i punti $P_0(x_0, z_0)$ e $P_1(x_1, z_1)$ così come sono riportati in figura.

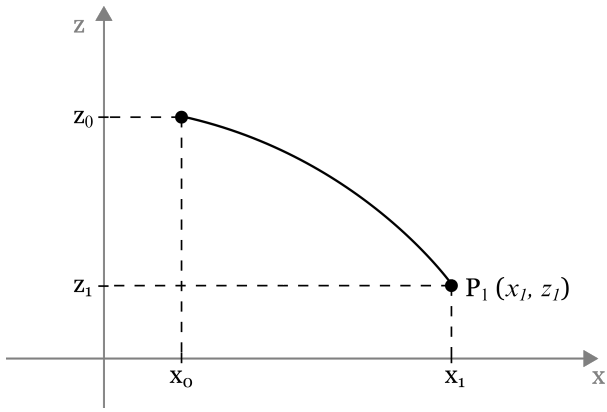
La condizione variazionale di Fermat 8.20 si traduce[15] in una sola delle equazioni 8.21, ovvero

$$\frac{d}{dx}\frac{z'}{v\sqrt{1+z'^2}} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\sqrt{z'^2+1}}{v^2} = 0\,,$$

essendo v fornita da 8.22.
Come in altri esempi fatti, nemmeno in questo caso converrà discutere tale equazione poiché

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{\partial L}{\partial z'}z' - L = \text{cost}$$

[14] Il problema sarà assai complicato, tuttavia diventa semplice se si considera $v = \text{cost}$.
[15] $L = \frac{\sqrt{1+z'^2}}{v(z)}$, .



quindi

$$\frac{z'^2}{v\sqrt{1+z'^2}} - \frac{\sqrt{1+z'^2}}{v} = \text{cost}\,,$$

che fornisce

$$v\sqrt{1+z'^2} = \text{cost}\,.$$

Ricordando l'espressione 8.22 di v, si ha

$$\left(\frac{c}{n_0(1-\frac{kz}{h})}\right)^2 (1+z'^2) = \bar{\alpha}$$

$$\frac{1+z'^2}{\left(1-\frac{kz}{h}\right)^2} = \frac{\bar{\alpha}\, n_0^2}{c^2} = \alpha$$

e, in definitiva,

$$\frac{1+z'^2}{1-\frac{2kz}{h}+\left(\frac{kz}{h}\right)^2} = \alpha\,.$$

Consideriamo di poter trascurare il termine $\left(\frac{kz}{h}\right)^2, z \ll h)$, otteniamo allora l'equazione approssimata

$$\frac{1+z'^2}{1-2\frac{kz}{h}} = \alpha$$

da risolvere con le condizioni $z(x_0) = z_0$ e $z(x_1) = z_1$. Si ricava dunque

$$\frac{dz}{\sqrt{(\alpha-1)-2\frac{\alpha kz}{h}}} = dx$$

$$-\frac{h}{2\alpha k}\frac{d\big[(\alpha-1)-2\frac{\alpha k z}{h}\big]}{\sqrt{(\alpha-1)-2\frac{\alpha k z}{h}}}=dx$$

e, integrando, viene

$$-\frac{h}{\alpha k}\sqrt{(\alpha-1)-2\frac{\alpha k z}{h}}=x+\beta$$

$$z=-\frac{\alpha k}{2h}(x+\beta)^2+\frac{h}{2\alpha k}(\alpha-1)\,,$$

che rappresenta un **arco di parabola**. Risulta infine possibile determinare α e β con le condizioni al contorno $z(x_0)=z_0$ e $z(x_1)=z_1$.

Esercizio

Completare la dimostrazione del Principio di Hamilton.

Suggerimento: si proceda per assurdo supponendo — ad esempio — che nell'istante $\bar{t}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial L}{\partial q_1}\bigg|_{\bar{t}}>0\,,$$

quindi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial L}{\partial q_1}>0\,,\qquad (\bar{t}-\delta,\bar{t}+\delta)\,.$$

Data l'arbitrarietà si scelgano le δq_h:

$$\begin{cases}\delta q_1=0,\ t\in[t_0,t_1]/(\bar{t}-\delta,t\bar{+}\delta)\\ \delta q_1>0,\ t\in(\bar{t}-\delta,t+\delta)\\ \delta q_i=0,\ t\in[t_0,t_1],i=(2,...,N)\,.\end{cases}\tag{8.23}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_{t_0}^{t_1}\sum_1^N\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}-\frac{\partial L}{\partial q_h}\right)\delta q_h dt\\ &= \int_{t_0-\delta}^{t_1+\delta}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial L}{\partial q_1}\right)\delta q_1 dt>0\end{aligned}$$

ecc...

Capitolo 9

Meccanica Hamiltoniana

9.1 Equazioni di Hamilton (o canoniche)

Sia $L(q, \dot{q}, t)$ un lagrangiano generalizzato[1] e

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0\,, \qquad \text{con } h = 1, ..., N \tag{9.1}$$

le relative equazioni di Lagrange, dove si ipotizza

$$\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \dot{q}_k}\right] \neq 0\,. \tag{9.2}$$

Si ponga ora

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,, \tag{9.3}$$

che verranno detti **momenti coniugati** della variabile q_h.
Da 9.2 segue che si possono risolvere le 9.3 rispetto alle $\dot{q}_h$ ottenendo

$$\dot{q}_h = \psi_h(q_h, p_h, t) \tag{9.4}$$

che, in seguito, scriveremo

$$\dot{q}_h = \psi(q, p, t)\,. \tag{9.5}$$

[1] E' ovvio che quanto verrà stabilito varrà anche se L è il lagrangiano di un sistema classico o naturale.

Per distinguere tra le variabili proprie dell'impostazione lagrangiana e quelle proprie dell'impostazione hamiltoniana, d'ora in poi diremo[2]:

$$\begin{array}{ll} (q, \dot{q}, t) & \textbf{variabili lagrangiane} \\ (q, p, t) & \textbf{variabili hamiltoniane}\,. \end{array}$$

Dato il lagrangiano generalizzato $L(q, \dot{q}, t)$ è possibile esprimere ogni $F(q, \dot{q}, t)$ in variabili hamiltoniane ponendo al posto delle $\dot{q}_h$ le espresioni 9.5, ovvero

$$\hat{F} = F\Big[q_h, \psi_h(q, p, t), t\Big]\,,$$

che chiameremo **espressione hamiltoniana** di $F(q, \dot{q}, t)$.
Si osservi che se L è il lagrangiano di un sistema naturale — quindi $L = L_2 + L_1 + L_0$ — allora

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \sum_1^N a_{hk}\dot{q}_k + \phi_h(q, t)$$

e, se in particolare il sistema fosse *potenziale*[3], si avrebbe

$$p_h = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_1^N a_{hk}\dot{q}_k + b_h\,.$$

9.1.1 Esercizio

In riferimento al sistema rappresentato in figura, scrivere l'espressione hamiltoniana del lagrangiano corrispondente.

Il lagrangiano del sistema è

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{h}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)\,,$$

quindi

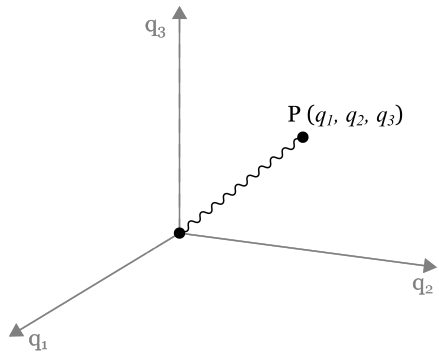
$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_h \qquad \Rightarrow \qquad \dot{q}_h = \frac{p_h}{m_h}$$

e

$$\hat{L} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} - \frac{h}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)\,.$$

[2] A completamento di questo capitolo si consulti il testo di *F. R. Gantmacher*, Cap. III e Cap. IV.

[3] Ovvero se $L = T + U(q, t)$).



Si osservi che le p_h sono le componenti della quantità di moto (*momentum*) $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, da cui la conseguente denominazione delle p_h come *momenti* associati alla variabile q_h.

Si consideri la **funzione hamiltoniana** (detta anche *hamiltoniano*)

$$H(q, \dot{q}, t) = \sum_{1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - L \tag{9.6}$$

e, tranne avviso contrario, si consideri H in variabili hamiltoniane, ovvero porremo $H = \widehat{H}$:

$$H = H(q, p, t) = \sum_{1}^{N} p_h \widehat{\dot{q}_h} - \widehat{L}\,. \tag{9.7}$$

Non sarebbe difficile dimostrare che il sistema lagrangiano 9.1 equivale al sistema

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{cases} \tag{9.8}$$

detto **sistema di Hamilton** o **sistema canonico**[4].
L'equivalenza dei due sistemi significa che se $\{q_h(t)\}$ è soluzione del sistema 9.1 (di Lagrange), allora

$$\left(q_h(t), p_h(t) = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right|_{q_h = q_h(t)} \right)$$

[4]Vedi paragrafo 9.5.

è soluzione del sistema 9.8. Viceversa, se $\{q_h(t), p_h(t)\}$ è soluzione del sistema 9.8, allora $\{q_h(t)\}$ è soluzione del sistema di Lagrange 9.1.

Si osservi che il sistema di Lagrange è formato da N equazioni, ciascuna del 2° ordine, mentre il sistema di Hamilton è formato da $2N$ equazioni del primo ordine.

9.2 Proprietà dell'Hamiltoniano

Derivando $H(q, p, t)$ totalmente si giunge a

$$\frac{dH}{dt} = \sum_1^N \left(\frac{\partial H}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial H}{\partial p_h} \dot{p}_h \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

e, per ogni soluzione del sistema 9.8, si ha

$$\frac{dH}{dt} = \sum_1^N \left[\frac{\partial H}{\partial q_h} \frac{\partial H}{\partial p_h} - \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial H}{\partial q_h} \right] + \frac{\partial H}{\partial t} \, .$$

Vale pertanto

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{9.9}$$

"lungo" ogni soluzione del sistema 9.8.

Si ricordi che con la 5.38 si era stabilito che

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \, ,$$

ne consegue che l'ìndipendenza del tempo di L — e equivalentemente di H — implica l'integrale primo

$$H = \text{cost} \, , \tag{9.10}$$

che si dice ancora **integrale generalizzato dell'energia**.
Nel caso particolare in cui poi il sistema fosse naturale, si era dimostrato con la 5.40 che $H = L_2 - L_0$ e pertanto, in variabili hamiltoniane,

$$H = \widehat{L_2} - L_0 \, , \tag{9.11}$$

formula utile per calcolare H in funzione delle variabili hamiltoniane.

Si osservi che, in generale, se $L = T_2 + T_1 + T_0 + U + V$, dove V indica il potenziale generalizzato $V = V_1 + V_0$, la 9.11 si riscrive esplicitamente

$$H = \widehat{T}_2 - T_0 - V_0 - U \tag{9.12}$$

mentre, se il sistema è **conservativo** (a vincoli fissi),

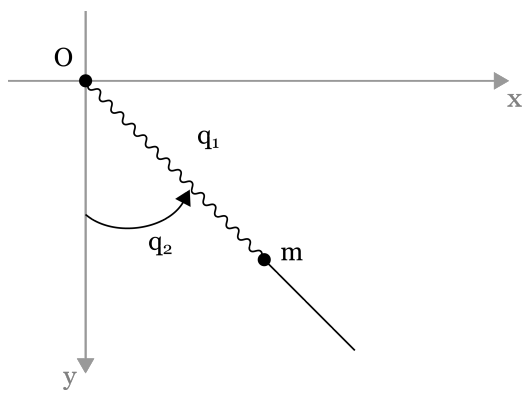
$$H = \widehat{T}_2 - U = \widehat{T} - U\,, \tag{9.13}$$

dove H coinciderà dunque con l'**energia meccanica**, espressa in variabili Hamiltoniane.

9.3 Esempi ed esercizi

9.3.1 Esempio 1

Si consideri il sistema schematizzato in figura: una sbarretta omogenea, di lunghezza l e massa M è incernierata in O e vincolata a stare nel piano $(0, x, y)$; il punto P, di massa m, è a sua volta vincolato a muoversi sulla sbarretta. Tutti i vincoli sono lisci.



Scrivere le equazioni di Hamilton.

Svolgimento:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}(mq_1^2 + \frac{Ml^2}{3})\dot{q}_2^2\,,$$

$$U = mgq_1 \cos q_2 + \frac{Mgl}{2} \cos q_2 - \frac{h}{2} q_1^2 \,,$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1 \\ p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = (mq_1^2 + \frac{Ml^2}{3})\dot{q}_2 \,. \end{cases}$$

Da questo segue

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{p_1}{m} \\ \dot{q}_2 = \frac{p_2}{mq_1^2 + \frac{Ml^2}{3}} \,, \end{cases}$$

dove quest'ultimo sistema rappresenta il primo gruppo delle equazioni di Hamilton (7.8). Ora però, per completare le equazioni, occorre scrivere l'Hamiltoniano $H(q, p, t)$.
Nel caso in cui il sistema sia a *a vincoli fissi e naturale* vale, come detto prima, la 9.13:

$$H = \widehat{T} - U = \frac{1}{2} m \left(\frac{p_1}{m} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(mq_1^2 + \frac{Ml^2}{3} \right) \left(\frac{p_2}{mq_1^2 + \frac{Ml^2}{3}} \right)^2 - U$$

e, in definitiva,

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2(mq_1^2 + \frac{Ml^2}{3})^2} + \frac{h}{2} q_1^2 - g \left(mq_1 + \frac{Ml}{2} \cos q_2 \right) .$$

Il secondo gruppo delle equazioni di Hamilton è quindi

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{mq_1 p_2^2}{(mq_1^2 + \frac{Ml^2}{3})^2} - hq_1 + mg \cos q_2 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -g\big(mq_1 + \frac{Ml}{2}\big) \sin q_2 \quad . \end{cases}$$

9.3.2 Esempio 2

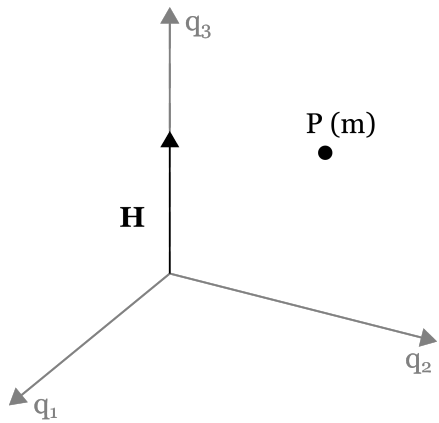
Scrivere le equazioni di Hamilton per una particella carica di massa m e carica q nel campo magnetico $\mathbf{H} = H\mathbf{c_3}$.

La particella è soggetta alla forza di Lorentz $\mathbf{F} = \frac{q}{c}\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}$ che ammette potenziale generalizzato $V = \frac{q}{2c}\mathbf{H} \wedge OP \times \mathbf{v}$, ovvero

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{vmatrix} = \frac{Hq}{2c} (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1) \,,$$

da cui

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{Hq}{2c} (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1) \,.$$



Si ha dunque

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = mq_1 - \frac{Hq}{2c}q_2 \\ p_2 = \frac{\partial L}{\partial q_2} = mq_2 - \frac{Hq}{2c}q_1 \\ p_3 = \frac{\partial L}{\partial q_3} = mq_3 \end{cases}$$

da cui consegue

$$\begin{cases} \dot{q_1} = \frac{p_1}{m} + \frac{Hq}{2mc}q_2 \\ \dot{q_2} = \frac{p_2}{m} - \frac{Hq}{2mc}q_1 \\ \dot{q_3} = \frac{p_3}{m} \quad , \end{cases}$$

che rappresenta il primo gruppo delle equazioni di Hamilton.

Infine il sistema è naturale — vale pertanto la 9.11 — quindi

$$H = \widehat{L}_2 - L_0 = \widehat{T}$$

che porta a

$$H = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{p_1}{m} + \frac{qH}{2mc}q_2\right)^2 + \left(\frac{p_2}{m} - \frac{qH}{2mc}q_1\right)^2 + \left(\frac{p_3}{m}\right)^2\right].$$

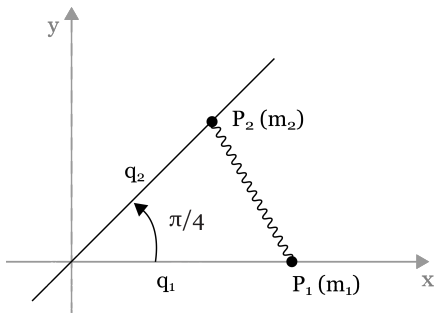
Le equazioni seguenti completano dunque il sistema:

$$\begin{cases} \dot{p_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{qH}{2c}\left(\frac{p_2}{m} - \frac{qH}{2mc}q_1\right) \\ \dot{p_2} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{qH}{2c}\left(\frac{p_1}{m} + \frac{qH}{2mc}q_2\right) \\ \dot{p_3} = -\frac{\partial H}{\partial q_3} = 0 \quad . \end{cases}$$

9.3.3 Esercizio

Il sistema rappresentato in figura — già incontrato nel Capitolo 7 — ha lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - m_2 g\frac{\sqrt{2}}{2}q_2 - \frac{h}{2}\left[q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2\sqrt{2}\right].$$



Si scrivano le equazioni di Hamilton.

Soluzione:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{p_1}{m_1} \\ \dot{q}_2 = \frac{p_2}{m_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -hq_1 + h\frac{\sqrt{2}}{2}q_2 \\ \dot{p}_2 = -hq_2 + h\frac{\sqrt{2}}{2}q_1 - m_2 g\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

9.4 Integrali primi e parentesi di Poisson

9.4.1 Integrali primi

Dato il sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{cases} \qquad \text{con } h = 1, ..., N \tag{9.14}$$

si dice **integrale primo** del sistema una funzione $f(q,p,t)$ tale che[5] ogni soluzione del sistema (p,q) risulti

$$f = (q,p,t) = \text{cost} \ . \tag{9.15}$$

Importanti esempi di integrali primi intervengono nel caso di *coordinate cicliche*, dove q_α è una coordinata ciclica (o ignorabile) quando risulta

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0 \, .$$

E' evidente che q_α è ciclica anche in quanto variabile lagrangiana. Infatti, se f non dipende da q_α, anche $H = \sum_1^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - L$ non dipende da q_α, e viceversa; se q_α è ciclica, dalla seconda equazione di 9.14 segue evidentemente

$$p_\alpha = c_\alpha = \text{cost} \, ,$$

che è integrale primo del sistema 9.14.

La presenza di coordinate cicliche facilita la soluzione del sistema poiché l'ordine ne viene abbassato. Si considerino ad esempio

$$\begin{array}{lll} q_h & \text{non cicliche} & \text{con } h = 1, ..., m \\ q_\alpha & \text{cicliche} & \text{con } \alpha = m+1, ..., N \ . \end{array}$$

Dividiamo il sistema 9.14 in

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \, , \end{cases} \qquad \text{con } h = 1, ..., m \tag{9.16}$$

e

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0 \, , \end{cases} \qquad \text{con } \alpha = m+1, ..., N \quad : \tag{9.17}$$

da 9.14_2 segue ovviamente

$$p_\alpha = c_\alpha \, , \qquad \text{con } \alpha = m+1, ...N \, . \tag{9.18}$$

La funzione Hamiltoniana non dipende quindi dalle q_α e si ha dunque

$$H = H(q_h, p_h, c_\alpha, t) \, . \tag{9.19}$$

[5]Si ricordi quanto già detto per gli integrali primi dell'equazione di Lagrange: spesso è l'uguaglianza 9.15 che è detta integrale primo.

Il sistema 9.16 si presenta quindi come un sistema in $2m$ equazioni, nelle $2m$ incognite (q_h, p_h), il cui integrale generale è

$$q_h = q_h(t, c_h, c'_h, c_\alpha) \quad \text{e} \quad p_h = p_h(t, c_h, c'_h, c_\alpha)\,, \text{con } h = 1, ..., m\,. \tag{9.20}$$

A questo punto il problema è risolto, è cioè immediata la soluzione di 9.17. Sostituendo infatti 9.20 in 9.17 mediante quadrature si ottiene

$$\begin{cases} q_\alpha = \int \frac{\partial H}{\partial p_h}(t, c_h, c'_h, c_\alpha)dt + c'_\alpha \\ p_\alpha = c_\alpha \qquad\qquad \text{con } \alpha = m+1, ..., N\ . \end{cases} \tag{9.21}$$

La 9.20 e la 9.21 costituiscono dunque l'integrale generale del sistema 9.14. In definitiva la soluzione del sistema 9.14, che è di ordine $2N$, è stata riportata alla soluzione del sistema 9.16, che è di ordine $2m$, essendo m il numero delle coordinate *non* cicliche.

Osservazione

Si è visto che

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_\alpha = c_\alpha = \text{cost}\,,$$

ovvero, se q_α è una coordinata ciclica, il **momento coniugato** p_α è costante. D'altra parte è noto che

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H = \text{cost}\,,$$

cioè vale l'integrale generalizzato dell'energia. Viene dunque da pensare che H possa essere visto come il "momento coniugato" della variabile t: svilupperemo in seguito questo argomento.

9.4.2 Parentesi di Poisson

Date due funzioni $f(q,p,t)$ e $g(q,p,t)$ (almeno C^2), si definisce **parentesi di Poisson** la seguente espressione:

$$(fg) = \sum_1^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q_h} \right). \tag{9.22}$$

Non sarebbe difficile verificare le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} (fg) = -(gf) \\ (cfg) = c(fg) \qquad \text{con } c = \text{costante} \\ \\ \frac{\partial (fg)}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} g \right) + \left(f \frac{\partial g}{\partial t} \right) \end{cases} \tag{9.23}$$

e la seguente **identità di Poisson**:

$$\Big((fg)h \Big) + \Big((gh)f \Big) + \Big((hf)g \Big) = 0\,, \qquad \text{con } h = h(q,p,t)\,. \tag{9.24}$$

Sia $f(q,p,t)$ un integrale primo del sistema 9.16, cioè per ogni sua soluzione $\{q(t), p(t)\}$ risulti

$$f(q,p,t) = \text{cost}\,.$$

Da questa, per derivazione, segue

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial f}{\partial p_h} \dot{p}_h \right) = 0\,,$$

quindi[6]

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial H}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial H}{\partial q_h} \right) = 0\,.$$

Facendo ora uso della parentesi di Poisson si ottiene

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (fH) = 0\,,$$

ne viene che $f(q,p,t)$ è integrale primo *se e solo se*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (fH) = 0\,. \tag{9.25}$$

Il seguente teorema consentirà quindi di ricavare integrali primi del sistema 9.16 qualora ne fossero noti (almeno) due.

[6] Da 9.16.

Teorema 9.1 (Teorema di Poisson) *Se $f(q,p,t)$ e $g(q,p,t)$ sono integrali primi del sistema*

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{cases} \qquad con\ h = 1, ..., N$$

allora (f,g) ne è integrale primo.

Dimostrazione: in riferimento alla relazione 9.25 sarà sufficiente dimostrare che

$$\frac{\partial(fg)}{\partial t} + \Big((fg)H\Big) = 0\,.$$

Infatti dalla proprietà 9.23_3 segue

$$\frac{\partial(fg)}{\partial t} + \big((fg)H\big) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}g\right) + \left(f\frac{\partial g}{\partial t}\right) + \big((fg)H\big)\,. \tag{9.26}$$

L'ipotesi comporta che

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial t} & +(fH) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial t} & +(gH) = 0 \end{array}$$

pertanto, ricavando da quest'ultima $\partial f/\partial t$ e $\partial g/\partial t$, e sostituendo il tutto nella 9.26, si ottiene

$$\frac{\partial(fg)}{\partial t} + \big((fg)H\big) = \big(-(fH)g\big) + \big(f-(gH)\big) + \big((fg)H\big)\,. \tag{9.27}$$

Facendo ora uso della 9.23_1, il secondo membro di 9.27 può essere riscritto come

$$\big((fg)H\big) + \big((gH)f\big) + \big((Hf)g\big) = 0$$

per l'identità di Poisson 9.24, come si voleva dimostrare.

Ne consegue dunque un metodo per la ricerca di altri integrali primi di 9.16:

$$\big(f(fg)\big) \qquad \text{e} \qquad \big(g(fg)\big) \tag{9.28}$$

sono ancora integrali primi[7].
Risultano evidenti le seguenti:

$$(p_h p_k) = (q_h q_k) = 0\,, \qquad (q_h p_k) = -(p_h q_k) = \delta_{hk}\,, \tag{9.29}$$

[7]Si badi bene però che gli integrali 9.28 (o altri successivamente deducibili) possono non essere *indipendenti* dagli integrali già noti.

dove le parentesi indicate si dicono **parentesi di Poisson fondamentali**.

Osservazione

Mediante le parentesi di Poisson si può dare al sistema Hamiltoniano 9.16 una forma del tutto *simmetrica*, ovvero

$$\begin{cases} \dot{q}_h = (q_h H) \\ \dot{p}_h = (p_h H) \end{cases}, \tag{9.30}$$

come è facile verificare.

Infine si avverte che in molti testi le parentesi di Poisson vengono indicate usando le parentesi graffe anziché le tonde, ovvero $\{fg\}$ o $\{f, g\}$.

9.5 Sistemi di Lagrange e di Hamilton: l'equivalenza

Il sistema di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad \text{con } h = 1, ..., N \tag{9.31}$$

equivale al sistema di Hamilton (o canonico)

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{cases} \qquad \text{con } h = 1, ..., N\,, \tag{9.32}$$

essendo[8]

$$H(q, p, t) = \sum_1^N p_h \widehat{\dot{q}}_h - \widehat{L}\,. \tag{9.33}$$

Infatti

$$\frac{\partial H}{\partial q_h} = \sum_1^N p_k \frac{\partial \widehat{\dot{q}}_k}{\partial q_h} - \frac{\partial \widehat{L}}{\partial q_h} - \sum_1^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \widehat{\dot{q}}_k}{\partial q_h} \tag{9.34}$$

[8] $\widehat{L} = L(q, \widehat{\dot{q}}, t)$

e, poiché $p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$, da 9.34 risulta

$$\frac{\partial H}{\partial q_h} = -\frac{\partial L}{\partial q_h} \,. \tag{9.35}$$

Da 9.31 segue allora

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt}p_h = \dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \,,$$

che è la seconda equazione del sistema 9.32.
Inoltre[9]

$$\frac{\partial H}{\partial p_h} = \dot{q}_h + \sum_1^N p_k \frac{\partial \widehat{\dot{q}}_k}{\partial p_h} - \sum_1^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \widehat{\dot{q}}_k}{\partial p_h}$$

da cui segue proprio la 9.32_1, come volevasi dimostrare.

Enunciamo — senza dimostrarlo — il seguente teorema:

Teorema 9.2 *Il sistema Hamiltoniano 9.8 è integrabile se esisono N integrali primi f_k* ***indipendenti****, e in* ***involuzione****, ovvero tali che*

$$(f_h f_k) = 0 \qquad \forall h \neq k \,.$$

Quindi, se $\partial H/\partial t = 0$, sono vere le seguenti:

1. *un sistema ad* ***un grado di libertà*** *è integrabile*[10]*;*

2. *un sistema a* ***due gradi di libertà****, con un integrale primo f (oltre ad H), è integrabile in quanto è noto $(fH) = 0$;*

3. *se esistono integrali primi indipendenti f_1, f_2 tali che $(f_1 f_2) = 0$, lo stesso vale anche per un sistema a* ***tre gradi di libertà****.*

Infatti $(f_1\, H) = (f_2\, H) = 0$ per quanto detto al punto 2.

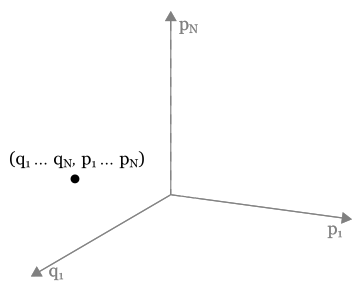
[9] Vedi 9.33.
[10] Ammette l'integrale H.

9.6 Invariante integrale di Poincaré-Cartan

Sia dato il sistema hamiltoniano (o canonico)

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \qquad h = 1, ..., N \end{cases} \tag{9.36}$$

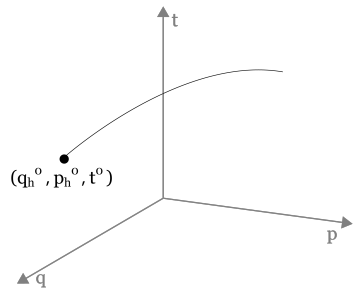
relativo al lagrangiano L — lo si pensi relativo ad un sistema meccanico — e valgano le condizioni di esistenza ed unicità delle soluzioni. Al posto dello spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^N$, proprio dell'interpretazione lagrangiana, introduciamo lo *spazio* $\mathbb{R}^{2N}$ *delle fasi*: un punto di tale spazio rappresenta uno *stato* del sistema la cui evoluzione è fornita dalle soluzioni del sistema 9.36.



Si dice *stato* in quanto fornisce — in sostanza — posizione e "velocità" del sistema (meccanico). Potremo anche considerare lo spazio delle fasi e diremo che la "curva"

$$\begin{cases} t = t \\ \\ q_h = q_h(t) \qquad t_0 \leq t \leq t_1 \\ \\ p_h = p_h(t) \end{cases}$$

è una **traiettoria rettilinea** in tale spazio se $\left[q_h(t), p_h(t)\right]$ costituiscono una soluzione del sistema 9.36 nell'intervallo (t_0, t_1).



Si consideri un qualsiasi ciclo chiuso[11] C_0 nello spazio ampliato delle fasi, e tale ciclo abbia equazioni

$$\begin{cases} q_h = q_h^0(\alpha) \\ p_h = p_h^0(\alpha) \\ t = t_0(\alpha)\,, \end{cases} \tag{9.37}$$

con $0 \leq \alpha \leq l$.

Fissato un punto qualsiasi di C_0, per questo passa una — ed una sola — traiettoria rettilinea definita dal sistema 9.36 e, nel loro complesso, tali traiettorie formano un cilindro chiuso in $\mathbb{R}^{2N+1}$.

Se C è un altro ciclo qualsiasi su tale cilindro, avente equazioni

$$\begin{cases} q_h = q_h(\alpha) \\ p_h = p_h(\alpha) \\ t = t(\alpha)\,, \end{cases} \tag{9.38}$$

con $0 \leq \alpha \leq l$, si potrebbe dimostrare (ma lo ometteremo) che

$$\oint_{C_0} \left(\sum_1^N p_h\, \delta q_h - H\, \delta t \right) = \oint_C \left(\sum_1^N p_h\, \delta q_h - H\, \delta t \right).$$

Sussiste quindi il seguente teorema:

Teorema 9.3 *L'integrale*

$$\oint \sum_1^N p_h\, \delta q_h - H \delta t$$

[11] Curva regolare chiusa.

è invariante per ogni ciclo tracciato su qualsiasi cilindro di traiettorie rettilinee definito dal sistema canonico 9.36.[12]

L'integrale

$$I = \oint \left(\sum_1^N p_h \, \delta q - H \, \delta t \right) \tag{9.39}$$

si dice **invariante integrale di Poincaré-Cartan** e la sua invarianza è *caratteristica* dei sistemi canonici.
Per dimostrarlo si consideri un sistema generico

$$\begin{cases} \dot{q}_h = Q_h(q,p,t) \\ \dot{p}_h = P_h(q,p,t)\,, \end{cases} \tag{9.40}$$

anche in questo caso diremo *traiettoria rettilinea in* $\mathbb{R}^{2N+1}$ una traiettoria definita da una soluzione $\{q_h(t), p_h(t)\}$ del sistema 9.40.

Teorema 9.4 *Se l'integrale di Poincaré-Cartan*

$$\oint \left(\sum_1^N p_h \delta q_h - H \delta t \right),$$

con $H(q,p,t)$ assegnata funzione, è invariante per ogni ciclo C di qualsiasi cilindro di traiettorie rettilinee del sistema 9.40. Risulta

$$Q_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad e \qquad P_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}$$

e il sistema è quindi canonico di hamiltoniano H.

Infatti, il sistema può scriversi nella forma

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \frac{dq_2}{Q_2} = ... = \frac{dq_N}{Q_N} = \frac{dp_1}{P_1} = ... = \frac{dp_N}{P_N} = dt = d\mu \; \Pi(q,p,t)\,, \tag{9.41}$$

[12] Vedi *Gantmacher*. Si osservi che, in tal caso, si deve considerare la variazione

$$\delta \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L(q,\dot{q},t) dt$$

nella quale, a differenza del principio di Hamilton, anche gli estremi di integrazione dipendono dal parametro α.

dove all'ultimo membro abbiamo introdotto un parametro μ e una funzione arbitraria $\Pi(q,p,t) \in C^k$. In tal modo il sistema 9.41 è di $2N+1$ equazioni in cui assumiamo μ come variabile indipendente; la soluzione è del tipo

$$\begin{cases} q_h = q_h(\mu, q_h^0, p_h^0, t_0) \\ p_h = p_h(\mu, q_h^0, p_h^0, t_0) \\ t = t(\mu, q_h^0, p_h^0, t_0)\,, \end{cases} \tag{9.42}$$

essendo (q_h^0, p_h^0, t_0) condizioni iniziali generiche.

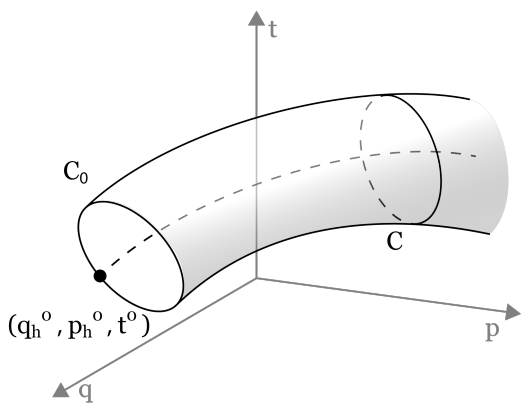
Si consideri ora un ciclo C_0 arbitrario di equazioni[13]

$$\begin{cases} q_h = q_h^0(\alpha) \\ p_h = p_h^0(\alpha) \\ t = t_0(\alpha)\,, \end{cases} \tag{9.43}$$

con $0 \leq \alpha \leq l$: l'insieme delle traiettorie rettilinee passanti per i punti di C_0 definisce un *cilindro di traiettorie*

$$\begin{cases} q_h = q_h(\mu, \alpha) \\ p_h = p_h(\mu, \alpha) \\ t = t(\mu, \alpha)\,, \end{cases} \tag{9.44}$$

ottenibile sostituendo 9.44 in 9.42.



[13] Un "ciclo di condizioni iniziali".

Se in queste ultime si fissa α, è evidente che si ottiene l'equazione di una traiettoria in funzione di μ, mentre fissando μ si ottiene l'equazione di un ciclo sul cilindro, diciamo $C = C_\mu$.

Per l'ipotesi del Teorema 9.4, l'integrale di Poincaré-Cartan è invariante per ogni $C_\mu = C$, cioé risulta

$$\frac{d}{d\mu} \oint \left(\sum_1^N p_h \, \delta q_h - H \, \delta t \right) = 0 \, .$$

Indicando con d il differenziale rispetto a μ (δ è il differenziale rispetto a α!) si ha quindi

$$d \oint \left(\sum_1^N p_h \, \delta q_h - H \, \delta t \right) = \oint \left[\sum_1^N \left(dp_h \, \delta q_h + p_h \, d\delta q_h \right) - dH \, \delta t - H \, d\delta t \right] d\mu = 0 \, . \tag{9.45}$$

Consideriamo i termini $\oint p_h \, d\delta q_h$ e $\oint H \, d\delta t$ ed iniziamo a ragionare sul primo: dato che il ciclo è chiuso, integrando per parti si ha

$$\oint p_h \, d\delta q_h = p_h \, dq \Big|_0^l - \oint \delta p_h \, dq_h = - \oint \delta p_h \, dq_h \, ;$$

lo stesso per

$$\oint H \, d\delta t = - \oint \delta H \, dt \, .$$

Da 9.45 segue allora

$$\oint \left[\sum_1^N \left(dp_h \, \delta q_h - \delta p_h \, dq_h \right) - dH \, \delta t + \delta H \, dt \right] d\mu = 0 \, . \tag{9.46}$$

Essendo

$$\delta H = \sum_1^N \frac{\partial H}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial H}{\partial p_h} \delta p_h + \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \, ,$$

da 9.46 segue

$$\oint \left[\sum_1^N \left(dp_h + \frac{\partial H}{\partial q_h} dt \right) \delta q_h + \left(-dq_h + \frac{\partial H}{\partial p_h} dt \right) \delta p_h + \left(-dH + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \delta t \right] d\mu \, .$$

Poiché[14] $d\mu = dt/\Pi$, dividendo per $d\mu$ risulta

$$\oint \sum_1^N \Pi \left(\dot{p}_h + \frac{\partial H}{\partial q_h} \right) \delta q_h + \Pi \left(- \dot{q}_h + \frac{\partial H}{\partial p_h} \right) \delta p_h + \Pi \left(- \frac{dH}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) \delta t = 0 \tag{9.47}$$

[14] Vedi 9.41.

per ogni ciclo arbitrario C. La forma differenziale contenuta nell'integrale 9.47 è allora esatta. L'arbitrarietà della funzione Π comporta l'annullarsi di tutti i coefficienti. In particolare[15] segue

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} = Q_h \\ \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} = P_h \end{cases}$$

quindi il sistema è canonico di hamiltoniano H, come si voleva dimostrare.

Osservazione

L'introduzione di $\Pi\, d\mu$ al posto di dt serve a rendere generale il ciclo C (C_μ) altrimenti, per $t = \text{cost}$, corrisponderebbero cicli di stati simultanei e non cicli generici sul cilindro.

9.7 Invariante universale di Poincaré

Se l'invariante di Poincaré-Cartan

$$I = \oint \big(\sum_1^N p_h \delta q_h - H \delta t \big)$$

viene calcolato su un ciclo di stati simultanei di un qualsiasi cilindro di traiettorie rettilinee, risulta

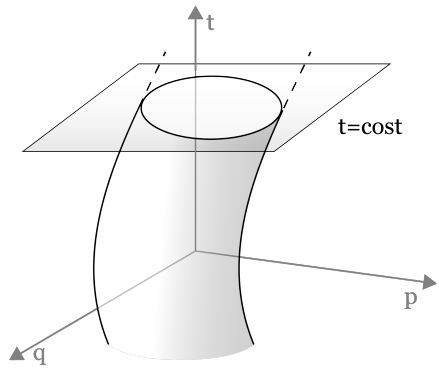
$$I = I_1 = \oint \sum_1^N p_h \delta q_h \,, \tag{9.48}$$

dato che $\delta t = 0$ sul ciclo.

I_1 si dice **invariante di Poincaré universale**, dove "universale" significa che, non contenendo H, è invariante per ogni ciclo di stati simultanei per qualsiasi cilindro di traiettorie rettilinee definito da *ogni* sistema canonico.

Si potrebbe dimostrare la "unicità" dell'invariante universale di Poincaré. Vale infatti il seguente terema:

[15] Vedi 9.40.



Teorema 9.5 (Teorema di Lee Hwa Chung) *Sia*

$$I^* = \oint \sum_1^N A_h(q,p,t)\delta q_h + B_h(q,p,t)\delta p_h$$

un invariante (lineare) universale, allora

$$I^* = cI_1 = c\oint \sum_1^N p_h \delta q_h \,,$$

ovvero I^* è l'invariante di Poincaré a meno di una costante moltiplicativa[16].

9.8 Trasformazioni canoniche (o di contatto)

Sia

$$\begin{cases} \tilde{q}_h = \tilde{q}_h(q,p,t) \\ \tilde{p}_h = \tilde{p}_h(q,p,t) \end{cases} \tag{9.49}$$

una trasformazione (invertibile) qualsiasi e l'inversa sia

$$\begin{cases} q_h = q_h(\tilde{q},\tilde{p},t) \\ p_h = p_h(\tilde{q},\tilde{p},t)\,. \end{cases} \tag{9.50}$$

Il (solito!) sistema canonico

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{cases} \tag{9.51}$$

[16] Per la dimostrazione vedi Gantmacher §19.

verrà trasformato da 9.49 e 9.50 in un sistema del tipo[17]

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}_h = f_h(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \\ \dot{\tilde{p}}_h = g_h(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \, . \end{cases} \tag{9.52}$$

Diremo che la trasformazione 9.49 è *canonica* se trasforma 9.51 in un sistema ancora canonico, ovvero se esiste $\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, t)$ tale che 9.52 sia del tipo

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_h} \\ \\ \dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_h} \, , \end{cases} \tag{9.53}$$

cosa che vale per ogni scelta di H.

In definitiva, una trasformazione è canonica se trasforma qualsiasi sistema canonico in un altro sistema canonico. Evidentemente si tratta di un *gruppo*[18] molto particolare.

Utilizzeremo questo concetto per fornire un metodo generale di soluzione dei sistemi canonici. E' evidente infatti che se riusciamo a trovare una trasformazione canonica 9.50, tale che il sistema trasformato 9.53 sia $\tilde{H} = 0$, la soluzione del sistema iniziale è immediata. Infatti, se nel sistema trasformato $\tilde{H} = 0$, da 9.53 segue

$$\begin{array}{rclcl} \dot{\tilde{q}}_h & = & 0 & \Rightarrow & \tilde{q}_h = \alpha_h \\ \dot{\tilde{p}}_h & = & 0 & \Rightarrow & \tilde{p}_h = \beta_h \, , \end{array}$$

dove α_h e β_h sono costanti arbitrarie. Sostituendo $\tilde{q} = \alpha_h$ e $\tilde{p}_h = \beta_h$ in 9.50 si ottiene

$$\begin{cases} q_h = q_h(t, \alpha_h, \beta_h) \\ p_h = p_h(t, \alpha_h, \beta_h) \, , \end{cases}$$

che è la soluzione di 9.51. In sostanza[19] questo è il metodo generale di Hamilton e Jacobi per i sistemi canonici, un metodo che "sposta" il problema dalla *soluzione* al reperimento di una opportuna trasformazione canonica.

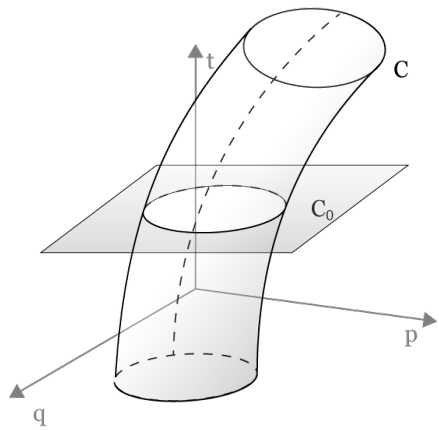
[17] Dimostrarlo per esercizio. Questo è vero anche se il sistema di partenza *non* è canonico.

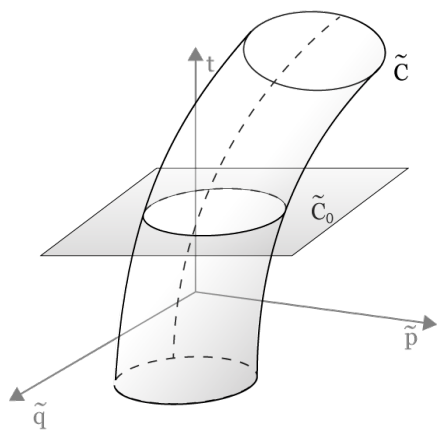
[18] Si dimostri che è un gruppo di trasformazioni.

[19] Si veda il Paragrafo 9.11.

9.9 Condizioni necessarie e sufficienti affinché una trasformazione sia canonica

Sia 9.50 una trasformazione canonica e 9.53 il sistema trasformato del sistema 9.36. Consideriamo due spazi $\mathbb{R}^{2N+1}$ delle fasi — (q_h, p_h, t) e $(\tilde{q}_h, \tilde{p}_h, t)$ — nei quali considereremo le traiettorie rettilinee dei due sistemi, rispettivamente 9.36 e 9.53.





C e $\tilde{c}$ sono due cicli[20] che individuano due cilindri di traiettorie retti-

[20] Corrispondenti mediante la trasformazione 9.50.

linee come rappresentanto in figura; C_0 e $\tilde{C}_0$ sono cicli di *stati simultanei* ottenuti intersecando i due cilindri con l'iperpiano $t = \text{cost}$. Per il teorema di invarianza dell'integrale di Poincaré-Cartan risulta

$$\oint_C \left(\sum_1^N p_h \, \delta q_h - H \, \delta t \right) = \oint_{C_0} \sum_1^N p_h \, \delta q_h \,, \tag{9.54}$$

$$\oint_{\tilde{C}} \left(\sum_1^N \tilde{p}_h \, \delta \tilde{q}_h - \tilde{H} \, \delta t \right) = \oint_{\tilde{C}_0} \sum_1^N \tilde{p}_h \, \delta \tilde{q}_h \,. \tag{9.55}$$

Nei secondi membri compaiono invarianti universali e quindi, sostituendo nel secondo le 9.49, dal teorema di Lee Hwa Chung segue

$$\oint_{\tilde{C}} \sum_1^N \tilde{p}_h \, \delta q_h = c \oint \sum_1^N p_h \, \delta q_h \,.$$

Moltiplicando per tale valore c entrambi i membri della 9.54 segue

$$\oint_{\tilde{C}} \left(\sum_1^N \tilde{p}_h \, \delta \tilde{q}_h - \tilde{H} \, \delta t \right) = c \oint_C \left(\sum_1^N (p_h \, \delta q_h - H \, \delta t) \right) .$$

Esprimiamo il primo membro in funzione di (q, p, t) e, passando allo stesso ciclo di integrazione C, ne deriva

$$\oint_C \left[\sum_1^N (\tilde{p}_h \, \delta \tilde{q}_h - \tilde{H} \, \delta t) - c \left(\sum_1^N p_h \, \delta q_h - H \, \delta t \right) \right] = 0 \,.$$

Essendo C un ciclo arbitrario, questo significa che la forma differenziale nell'integrale (espresso in q, p, t) è esatta ed esiste pertanto una funzione (primitiva) che conviene indicare con $-F(q, p, t)$ tale che risulti

$$\sum_1^N \tilde{p}_h \, \delta q_h - \tilde{H} \, \delta t = c \left(\sum_1^N q_h \, \delta q_h - H \, \delta t \right) - dF \,. \tag{9.56}$$

Si è quindi dimostrato che, se la trasformazione 9.49 è canonica, esiste una costante c e una funzione $F(q, p, t)$ tale che valga 9.56.

Proveremo ora che tale condizione è anche *sufficiente* alla canonicità della trasformazione 9.49. Supponiamo infatti che dato l'hamiltoniano H esistano $\tilde{H}$, $c \neq 0$ e $F(q, p, t)$ tali che valga 9.56, ne viene che per ogni ciclo

C su un generico cilindro di traiettorie rettilinee del sistema canonico si ha

$$\oint_C \left[\sum_1^N (\tilde{p}_h \, \delta\tilde{q}_h - \tilde{H} \, \delta t) - c\left(\sum_1^N p_h \, \delta q_h - H \, \delta t \right) \right] = 0 \,. \tag{9.57}$$

D'altra parte, il sistema canonico viene trasformato[21] in un sistema del tipo

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}_h = \tilde{Q}_h(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \\ \dot{\tilde{p}}_h = \tilde{P}_h(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \,. \end{cases} \tag{9.58}$$

Quindi, se $\tilde{C}$ è il ciclo corrispondente a C sul cilindro di traiettorie rettilinee del sistema 9.58, da 9.57 segue

$$\oint_{\tilde{C}} \left[\sum_1^N \tilde{p}_h \, \delta\tilde{q}_h - \tilde{H} \, \delta t \right] = c \oint_C \left[\sum_1^N p_h \, \delta q_h - H \, \delta t \right] .$$

L'invarianza del secondo integrale assicura l'invarianza di

$$\oint_{\tilde{C}} \left(\sum_1^N \tilde{p}_h \, \delta\tilde{q}_h - \tilde{H} \, \delta t \right)$$

per ogni ciclo sul generico cilindro di traiettorie rettilinee di 9.58. Tale invarianza assicura che il sistema 9.58 è canonico di hamiltoniano $\tilde{H}$ in base al Teorema 9.3. Ne consegue che la trasformazione è canonica (c.v.d.).

Si conclude che:

Teorema 9.6 *la condizione 9.56 è necessaria e sufficiente alla canonicità di una trasformazione.*

Si osservi che se la 9.56 è valida per una coppia di funzioni H e $\tilde{H}$, allora la trasformazione è canonica. Infatti, se H_* è arbitraria e $\tilde{H}_*$ è definita come

$$\tilde{H}_* - \tilde{H} = c(H_* - H) \,,$$

moltiplicando ambi i membri per δt e sottraendo da 9.56 risulta

$$\sum_1^N \left(\tilde{p}_h \, \delta\tilde{q}_h - \tilde{H}_* \, \delta t \right) = c\left(\sum_1^N p_h \, \delta q_h - H_* \, \delta t \right) - dF \qquad \text{c.v.d.}$$

[21] Vedi 9.52.

Osservazione

Se la trasformazione 9.49 è canonica, la relazione tra H e $\tilde{H}$ è immediatamente deducibile da 9.56. Infatti, annullando il coefficiente di δt si ha

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F}{\partial t}\,. \tag{9.59}$$

Si osservi inoltre che $\tilde{H}$ non è la "trasformata" di H secondo le 9.49, se non nel caso in cui $c = 1$ e $\partial F/\partial t = 0$, caso in cui la trasformazione è **completamente canonica**.

Proveremo infine una seconda — e più semplice — condizione *necessaria e sufficiente* alla canonicità di una trasformazione.

Teorema 9.7 *Condizione necessaria e sufficiente affinché la trasformazione 9.49 sia canonica è che esista una costante $c \neq 0$ e una funzione $F(q, p, t)$ tale che*

$$\sum_1^N \tilde{p}_h\, \delta\tilde{q}_h = c \sum_1^N p_h\, \delta q_h - \delta F\,, \tag{9.60}$$

dove δF rappresenta il differenziale ***virtuale*** *di F.*

Se infatti la trasformazione è canonica, vale la 9.56, che, per $\delta t = 0$, fornisce 9.10. Viceversa, se vale 9.10, e posto $\tilde{H} = cH + \partial F/\partial t$ che dà

$$\tilde{H}\,\delta t = \big(cH + \frac{\partial F}{\partial t}\big)\delta t\,, \tag{9.61}$$

sommando 9.10 e 9.61 termine a termine si ottiene l'equazione 9.56.

9.9.1 Esempio

Dimostrare che la trasformazione

$$\begin{cases} \tilde{q} = \arctan \frac{q}{p} \\ \\ \tilde{p} = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) \end{cases}$$

è canonica e univalente; trovare la funzione generatrice.

In questo caso $N = 1$, pertanto la condizione

$$\sum_1^N \tilde{p}_h\, \delta q_h = c \sum_1^N p_h\, \delta q_h \delta F$$

si riduce a

$$\tilde{p}\,\delta q_h = cp\,\delta q - \delta F\,,$$

ovvero

$$\frac{1}{2}(q^2+p^2)\delta \arctan\frac{q}{p} - cp\,\delta q = -\delta F$$

$$\frac{1}{2}(q^2+p^2)\left[\frac{1}{p(1+\frac{q^2}{p^2})}\delta q - \frac{q}{p^2}\frac{1}{1+\frac{q^2}{p^2}}\delta p\right] - c\,\delta q = -\delta F\,.$$

Ne segue

$$\frac{1}{2}\left[p\,\delta q - q\,\delta p\right] - c\,\delta q = -\delta F$$

e infine

$$\big(-\frac{p}{2}+cp\big)\delta q + \frac{q}{2}\delta p = \delta F\,.$$

La condizione necessaria (e sufficiente) è che

$$\frac{\partial}{\partial p}\big(-\frac{p}{2}+cp\big) = \frac{\partial}{\partial q}\big(\frac{q}{2}\big)\,,$$

da cui

$$c-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad c=1 \quad \text{(univalenza)}.$$

Si tratta ora di trovare la primitiva della *forma esatta*

$$\frac{p}{2}\delta q + \frac{q}{2}\delta p = \delta F = \frac{\partial F}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p \ :$$

$$\begin{aligned}
\frac{F}{\partial q} &= \frac{p}{2} \qquad \Rightarrow \qquad F = \int \frac{p}{2}dq + \psi(p) = \frac{qp}{2} + \psi(p)\\
\frac{F}{\partial p} &= \frac{q}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{qp}{2}+\psi(p)\right) = \frac{q}{2}\,,
\end{aligned}$$

quindi $\psi'(p)=0$. Ne segue

$$F = \frac{qp}{2}\,,$$

che è la funzione generatrice a meno di costanti.

9.10 Trasformazioni libere

Per la trasformazione seguente[22]

$$\begin{cases} \tilde{q}_h = \tilde{q}_h(q,p,t) \\ \tilde{p}_h = \tilde{p}_h(q,p,t) \end{cases} \tag{9.62}$$

si è supposto[23]

$$\frac{\partial(\tilde{q}_1,...,\tilde{q}_N,\tilde{p}_1,...,\tilde{p}_N)}{\partial(q_1,...,q_N,p_1,...,p_N)} \neq 0\,.$$

Una **trasformazione libera** è definita dall'essere[24]

$$\frac{\partial(\tilde{q}_1,\tilde{q}_2,...,\tilde{q}_N)}{\partial(p_1,p_2,...,p_N)} \neq 0\,, \tag{9.63}$$

condizione che consente l'invertibilità delle 9.62_1 e quindi di porre le 9.49 nella forma

$$\begin{cases} p_h = p_h(q,\tilde{q},t) \\ \tilde{p}_h = \tilde{p}_h(q,\tilde{q},t)\,, \end{cases} \tag{9.64}$$

assumendo come variabili indipendenti le $q_h, \tilde{q}_h$.
Si supponga 9.62 canonica e $S(q,\tilde{q},t)$ sia, in questo caso, la sua funzione generatrice: si ponga cioé $F(q,p,t) = S(q,\tilde{q},t)$ per il tramite di 9.64. Poiché la trasformazione è canonica risulta

$$\sum_1^N \tilde{p}_h\,\delta\tilde{q}_h - \tilde{H}\,\delta t = c\left(\sum_1^N p_h\,\delta q_h - H\,\delta t\right) - \delta S$$

e raccogliendo i coefficienti di $\delta q_h, \delta\tilde{q}_h, \delta t$ si ottiene

$$\begin{cases} cp_h = \frac{\partial S}{\partial q_h} \\ \\ \tilde{p}_h = -\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_h} \end{cases} \tag{9.65}$$

che, ovviamente, dà

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t}\,. \tag{9.66}$$

[22]Qui considereremo una trasformazione libera *evidente*, o di *prima specie*, ma esistono altri tipi di trasformazioni libere. Vedi "Esercizi" di Grioli-Bressan.

[23]Invertibilità.

[24]Oppure

$$\frac{p_1,p_2,...,p_N}{\tilde{q}_1,\tilde{q}_2,...,\tilde{q}_N} \neq 0\,.$$

Si osservi che le 9.65 rappresentano la *stessa* trasformazione 9.62 e 9.64, mentre la 9.63_2 può scriversi nella forma

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_h \partial \tilde{q}_h} \right| \neq 0 \,. \tag{9.67}$$

Nel caso che la trasformazione sia univalente ($c = 1$) — caso a cui ci atterremo d'ora in poi — le 9.65 sono

$$\begin{cases} p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h} \\ \tilde{p}_h = -\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_h} \end{cases} \tag{9.68}$$

e

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} \,. \tag{9.69}$$

Possiamo quindi concludere che ogni trasformazione canonica *libera* e *univalente* comporta l'esistenza della generatrice $S(q, \tilde{q}, t)$ che soddisfa 9.67 e può porsi nella forma 9.68.
Vale anche il viceversa: data $S(q, \tilde{q}, t)$ soddisfacente a 9.67, allora 9.68 rappresenta una trasformazione libera univalente di generatrice S che muta il sistema canonico di hamiltoniano H in un altro sistema canonico di hamiltoniano $\tilde{H}$, fornito da 9.69. La dimostrazione è immediata, vedi 9.68 e .

Quanto detto finora consente di illustrare il metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi per i sistemi canonici[25].

9.11 Metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi

Sia dato il sistema canonico

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{cases} \tag{9.70}$$

e sia S la funzione generatrice di una trasformazione canonica libera univalente (9.65): essa muterà il sistema 9.70 in

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_h} \\ \\ \dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_h} \,. \end{cases} \tag{9.71}$$

[25] Si rilegga il Paragrafo 9.8 e si noti che la condizione 9.67 consente di riportare le 9.68 nella forma 9.50.

Pensiamo ora che la funzione $S(q,p,t)$ sia integrale dell'equazione

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

e, anzi, ne sia un *integrale completo*[26]: essa definisce la trasformazione libera univalente 9.68. In tal caso la soluzione del sistema 9.71 è immediata: $\tilde{H} = 0$ e quindi

$$\tilde{q}_h = \alpha_h = \text{ cost}\,, \qquad\qquad \tilde{p}_h = \beta = \text{ cost}\,.$$

Ne viene che la soluzione del sistema di partenza 9.70, pur di considerare $\tilde{q}_h$ e $\tilde{p}_h$ costanti arbitrarie, è

$$\begin{cases} p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h} \\ \tilde{p}_h = -\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_h}\,. \end{cases} \tag{9.72}$$

Riscrivendo[27] $S(q_h, \tilde{q}_h, t)$ nella forma $S(q_h, \alpha_h, t)$, possiamo riscrivere le 9.72 in questo modo:

$$\begin{cases} p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h} \\ \beta_h = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_h}\,. \end{cases} \tag{9.73}$$

Il **metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi** è quindi così riassumibile: «*Se riusciamo a trovare un integrale completo $S(q,p,t)$ dell'equazione*

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,, \tag{9.74}$$

*che si dice **equazione di Hamilton-Jacobi**, allora la soluzione del sistema canonico 9.70 è fornita da 9.73. Essa è riportabile nella forma*

$$\begin{cases} q_h = q_h(\alpha_h, \beta_h, t) \\ p_h = p_h(\alpha_h, \beta_h, t) \end{cases}$$

[26] Cioè valga 9.67.

[27] Si tratta di un banale cambiamento di notazione:

$$\tilde{q}_h = \alpha_h \qquad \text{e} \qquad \tilde{p}_h = \beta_h\,.$$

in virtù della condizione di completezza 9.67.≫

Il problema è quindi *spostato* al reperimento di un integrale completo $S(q,p,t)$ dell'equazione di Hamilton-Jacobi, che scriveremo più esplicitamente come

$$H\left(q_h, \frac{\partial S}{\partial q_h}, t\right) + \frac{\partial S(q_h, \alpha_h, t)}{\partial t} = 0\,, \tag{9.75}$$

un'equazione alle derivate parziali. Si osservi che il problema è tutt'altro che facile: trovare un integrale completo di 9.75 non è proprio come risolverlo ma... "quasi"! Eppure il metodo talvolta funziona e — per fortuna o genialità — ha consentito di afforntare problemi molto importanti di Fisica e di Astronomia (spesso con ulteriori tecniche di approssimazioni perturbative) servendosi di un procedimento di *separazione delle variabili* di cui daremo in seguito qualche semplice esempio.

9.11.1 Osservazione

Risolvere un'equazione alle derivate parziali è in genere più difficile che risolvere un sistema differenziale ordinario. Ad esempio, la *più semplice* equazione alle derivate parziali del primo ordine è

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,, \tag{9.76}$$

si riporta alla soluzione dell'equazione ordinaria[28]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)} \tag{9.77}$$

che, per l'arbitrarietà di A e B, è "la più difficile" equazione differenziale del primo ordine.

9.11.2 Esercizio

Dimostriamo quanto ora affermato. Sia $\phi(x,y) = c$ l'integrale generale di 9.77, allora

$$u = F\big[\phi(x,u)\big] \tag{9.78}$$

[28]Con A e $B \neq 0 \in C'$ in un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$.

è integrale di 9.77 per *ogni* arbitraria funzione derivabile $F(\phi)$. Infatti[29]

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dF}{d\phi}\left[A\frac{\partial \phi}{\partial x} + B\frac{\partial \phi}{\partial y}\right] = 0\,.$$

Vale il viceversa: se $u = \psi(x, y)$ è integrale di 9.76, allora è del tipo 9.78, ovvero esiste una $F(\phi)$ tale che — almeno localmente — risulti

$$\psi(x, y) = F[\phi(x, y)]\,.$$

Infatti per ipotesi

$$\begin{cases} A\frac{\partial \psi}{\partial x} + B\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ \\ A\frac{\partial \phi}{\partial x} + B\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

e, poiché A e B sono diversi da zero, ovviamente

$$\frac{\partial(\psi, \phi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Quindi ψ e ϕ sono dipendenti funzionalmente. Ne consegue che 9.78 è l'integrale generale dell'equazione alle derivate parziali 9.76 e dipende da una *funzione arbitraria* anziché da una *costante arbitraria* come nel caso ordinario.

9.12 Alcuni casi significativi

9.12.1 Separazione delle variabili

D'ora in poi supporremo $\partial H/\partial t = 0$, quindi $H = H(q_1, ..., q_N, p_1, ..., p_N)$. In questo caso possiamo "isolare" la variabile t e assumere per l'incognita funzione $S(q, \alpha, t)$, nell'equazione 9.75 di Hamilton-Jacobi,

$$S = -\alpha_1 t + W(q_1, ..., q_N, \alpha_1, ..., \alpha_N)\,. \tag{9.79}$$

[29] Risulta evidentemente

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = 0\,;$$

ricavando dy da 9.77

$$dy = \frac{B}{A}dx$$

e sostituendo nella precedente, segue

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{B\partial \phi}{A\partial y}\right)dx = 0\,,$$

etc.

In tal caso l'equazione di Hamilton-Jacobi è

$$H\left(q_1, ..., q_N, \frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_N}\right) = \alpha_1 \tag{9.80}$$

e quindi il problema è la ricerca di un integrale completo W di 9.80, cioé un integrale $W(q, \alpha)$ tale che

$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial \alpha_k}\right| \neq 0\,.$$

Trovato W, la soluzione del sistema canonico di hamiltoniano H è fornita da[30]

$$\begin{cases} p_h = \frac{\partial W}{\partial q_h} \\ \beta_1 = t - \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \\ \beta_j = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_j}\,, \end{cases} \tag{9.81}$$

con $j = 2, ..., N$.

Per risolvere l'equazione 9.80 si può procedere mediante la **separazione delle variabili**: supponiamo che nella funzione H qualche coordinata — sia qui q_N e la corrispondente $\partial W/\partial q_N$ — compaia nella forma

$$\psi\left(q_N, \frac{\partial W}{\partial q_N}\right),$$

quindi l'equazione 9.80 sia del tipo

$$H\left[q_j, \frac{\partial W}{\partial q_j}, \psi\left(q_n \frac{\partial W}{\partial q_N}\right)\right] = \alpha_1\,, \qquad \text{con } j = 1, ..., N-1\,. \tag{9.82}$$

In questo caso cercheremo una solzuione

$$W = W' + W_N(q_N)\,. \tag{9.83}$$

L'equazione 9.80 si separa[31] in

$$\begin{cases} \psi\big(q_N, \frac{\partial W_N}{\partial q_N}\big) = \alpha_N \\ H\big(q_j, \frac{\partial W'}{\partial q_j}, \alpha_N\big) = \alpha_1\,, \end{cases}$$

[30] Vedi 9.73.

[31] ≪*Supponiamo di aver trovato la soluzione 9.83. Sostituita allora nell'equazione 9.82, quest'ultima deve trasformarsi in un'identità verificata, in particolare, per qualsiasi valore di q_N. Ma al variare di q_N può combiare solo la funzione ψ. Quindi, affinché la 9.82 sia un'identità, occorre che la funzione ψ sia una costante* ≫.
L.D. Landau (Meccanica)

dove la prima equazione fornisce $\partial W_N \big/ \partial q_N$ e — per quadratura di W_N — la seconda equazione riguarda solo $W'(q_j, \alpha_j)$ ed è più semplice. Se questo procedimento è ripetibile per altre variabili (possibilmente tutte!), esso facilita (o completa) l'integrazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi e quindi del sistema canonico di partenza.

9.12.2 Caso di varie coordinate cicliche

Siano cicliche $(q_{m+1}, ..., q_N)$, che indicheremo con q_j, mentre $(q_1, ..., q_m)$, che indicheremo con q_h, non lo siano. In tal caso si può dare alla funzione incognita S la forma

$$S = -\alpha_1 t + \sum_{m+1}^{N} q_j \alpha_j + W(q_1, ..., q_m, \alpha_1, ..., \alpha_N)\,. \tag{9.84}$$

Poiché H non contiente le q_j, l'equazione di Hamilton-Jacobi si scrive

$$H\left(q_1, ..., q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_N\right) = \alpha_1\,. \tag{9.85}$$

Una volta trovato l'integrale completo W, la soluzione del sistema canonico è[32]

$$\begin{cases} p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h} = \frac{\partial W}{\partial q_h} \qquad \text{con } h = 1, ..., m \\ p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = \alpha_j \qquad \text{con } j = m+1, ..., N \\ \beta_1 = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = t - \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \\ \beta_h = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_h} = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_h} \qquad \text{con } h = 2, ..., m \\ \beta_j = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = -q_j - \frac{\partial W}{\partial q_j} \qquad \text{con } j = m+1, ..., N\,. \end{cases} \tag{9.86}$$

9.12.3 Caso ovvio

Supponiamo che tutte le variabili siano cicliche tranne una, q_1. In tal caso si ha

$$S = -\alpha_1 t + \sum_{2}^{N} q_j \alpha_j + W(q_1, \alpha) \tag{9.87}$$

[32] Vedi 9.81.

e l'equazione di Hamilton-Jacobi è

$$H\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \alpha_2, ..., \alpha_N\right) = \alpha_1 \,, \tag{9.88}$$

da cui si ricava $\partial W \big/ \partial q_1$ e quindi

$$W = \int \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 \,. \tag{9.89}$$

Così il problema è completamente risolto e la soluzione del sistema è[33]

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} \\ \\ p_j = \alpha_j \\ \\ \beta_1 = t - \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \\ \\ \beta_j = -q_j - \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \,. \end{cases} \tag{9.90}$$

9.12.4 Esempio: soluzione hamiltoniana del problema dei due corpi

Nel problema dei due corpi il lagrangiano è

$$L = \frac{1}{2} m^* (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) \ :$$

si ha allora

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m^* \dot{r} \,, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m^* r^2 \dot{\theta} \,.$$

Ricordando che $H = \widehat{T} - U$, risulta

$$H = \frac{p_r^2}{2m^*} + \frac{p_\theta^2}{2m^* r^2} - U(r)$$

con θ ciclica. Posta la funzione generatrice

$$\delta = -\alpha_1 t + \alpha_2 \theta + W(r, \alpha_1, \alpha_2) \,,$$

dall'equazione di Hamilton-Jacobi si ottiene

$$\frac{1}{2m^*} \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{2m^* r^2} - U(r) = \alpha_1 \,,$$

[33] Vedi 9.87.

da cui si ricava

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \sqrt{2m^*\left[\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{2m^* r^2} + U(r)\right]}$$

e quindi

$$W = \int \sqrt{2m^*\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2m^* U(r)}dr\,.$$

Ne segue l'integrale generale del sistema Hamiltoniano (lo si svolga per esercizio):

$$\begin{aligned}
p_r &= \sqrt{2m^*\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2m^* U(r)} \\
p_\theta &= \alpha_2 \\
\beta_1 &= t - \int \frac{m^*\,dr}{\sqrt{2m^*\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2m^* U(r)}} \\
\beta_2 &= -\theta + \int \frac{\alpha_2/r_2\,dr}{\sqrt{2m^*\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2m^* U(r)}}\,.
\end{aligned}$$

9.12.5 Esempio di separazione totale

Nel solito sistema canonico sia $\partial H/\partial t = 0$ e sia H del tipo

$$H(q,p) = F\Big[f_1(q_1,p_1), f_2(q_2,p_2), ..., f_N(q_N,p_N),\Big]\,, \tag{9.91}$$

essendo

$$F = F(y_1, y_2, ..., y_N)$$

con $f_i(q_i,p_i)$ funzioni effettive delle p_i e $i = 1, ..., N$.
Posto

$$S = -\lambda t + V(q_i, \alpha_i)\,, \tag{9.92}$$

l'equazione di Hamilton-Jacobi è

$$H\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \lambda\,,$$

ovvero

$$F\left[f_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), ..., f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right), ..., f_N\left(q_N, \frac{\partial V}{\partial q_N}\right)\right] = \lambda\,. \tag{9.93}$$

Posto

$$f_i\left(q_i, p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \alpha_i\,, \qquad \text{con } i = 1, ..., N$$

e, date le funzioni inverse

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i(q_i, \alpha_i)\,,$$

segue

$$V = \sum_1^N \int F_i(q_i, \alpha_i) dq_i\,. \tag{9.94}$$

Quindi la 9.93 fornisce

$$\lambda = F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$$

e la 9.92 diviene

$$S = -F(\alpha_1, ..., \alpha_N)t + \sum_1^N \int F_i(q_i, \alpha_i) dq_i\,. \tag{9.95}$$

Ne risulta

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = F_i(q_i, \alpha_i) \\ \beta_i = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} t - \int \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} dq_i\,. \end{cases} \tag{9.96}$$

Non sarebbe difficile dimostare che 9.94 è un sistema completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi, quindi fornisce la soluzione voluta.

In genere non si presentano esempi così "facili", ma il procedimento può essere applicato ad alcune variabili coniugate q_i, p_i semplificando il problema. Nei testi specifici si trovano varie tecniche di separazione; ad esempio, se le variabili coniugate possono essere "inscatolate" con una struttura[34] di H come segue

$$F = f_N\{..., f_3\{f_2[f_1(q_1, p_1), q_2, p_2]q_3, p_3\}, ..., q_n, p_N\}\,,$$

[34] O dalla sua parte residua da altri procedimenti.

basta porre

$$\begin{cases} f_1(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}) = \alpha_1 \\ \\ f_2(\alpha_1 q_2, \frac{\partial V}{\partial q_2}) = \alpha_2 \\ \\ ... \\ \\ f_i(\alpha_{i-1}, q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}) = \alpha_i \\ \\ ... \\ \\ f_N(\alpha_{N-1}, q_N, \frac{\partial V}{\partial q_N}) = \alpha_N \end{cases}$$

e, ricavando da queste

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \Gamma_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)\,, \qquad (i = 1, ..., N)$$

si ha

$$S = -\alpha_N t + \sum_1^N \int \Gamma_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) dq_i\,.$$

Da questa, essendo S un integrale completo, si ha la soluzione.

Esercizio 1

Trovare con il metodo di Hamilton-Jacobi il moto del sistema proposto alla fine del Paragrafo 5.6.2.

Esercizio 2

Trovare con il metodo di Hamilton-Jacobi il moto del sistema proposto nell'Esempio 4.6.3.

Capitolo 10

Maree

Argomento monografico dei corsi 2006 e 2009[1].

10.1 Basi dinamiche

Consideriamo[2] due corpi celesti *isolati* T e S, sferici ed omogenei[3]. Penseremo che T sia la Terra, di centro Ω, massa $M_\oplus$ e raggio $R_\oplus$. Il corpo S (Sole o Luna) può essere pensato — agli effetti gravitazionali è del tutto equivalente — come un punto S in cui sia concentrata l'intera massa M.
Posto $r = |S\Omega|$, sia

$$R_\oplus \ll r \ , \tag{10.1}$$

il che risulterebbe accettabile anche se r fosse la distanza Terra-Luna.

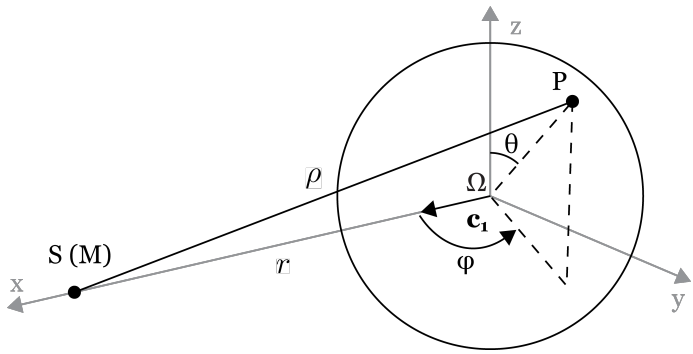
Trascuriamo per ora ogni rotazione di T rispetto ad un eventuale riferimento inerziale. Il sistema di riferimento (Ω, x, y, z) sia tale da avere l'asse x rivolto verso S e l'asse z sia di direzione invariabile rispetto ad un riferimento inerziale[4].
Il punto P rappresenti una massa *unitaria* sulla superficie di T, per esempio si consideri una massa unitaria d'acqua sulla superficie oceanica.

[1] In altri corsi, differenti argomenti sono stati trattati. Per esempio: "Corpo rigido", "Stabilità dell'equilibrio e dei moti di sistemi olonomi", "Relatività ristretta", "Equazioni alle derivate parziali della fisica matematica".

[2] In questo capitolo tratteremo il problema delle maree da un punto di vista elementare.

[3] O, più in generale, con distribuzione di massa a simmetria sferica.

[4] Si pensi all'asse z come all'asse ortogonale al piano dell'orbita.



Il riferimento (Ω, x, y, z) $\left[(\Omega, \mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3})\right]$ sia un riferimento non inerziale, su P agiranno pertanto 3 forze:

$\mathbf{F_1}$: la forza gravitazionale esercitata da $M_\oplus$;

$\mathbf{F_2}$: la risultante delle forze apparenti che — poiché trascurabile la forza centrifuga[5] — si riducono alla sola forza di trascinamento

$$-\mathbf{a}_\tau = -\mathbf{a_\Omega}\,;$$

$\mathbf{F_3}$: la forza gravitazionale dovuta alla massa M (del Sole o della Luna) posta in S.

Assunto quindi $\Omega P = \mathbf{d}$, segue che:

$$\mathbf{F_1} = -\frac{\gamma M_\oplus}{d^3}\mathbf{d}\,, \tag{10.2}$$

$$\mathbf{F_2} = -\mathbf{a_\Omega} = -\frac{\gamma M}{r^2}\mathbf{c_1}\,, \tag{10.3}$$

$$\mathbf{F_3} = -\frac{\gamma M}{\rho^3}SP \qquad {}^{6}\,. \tag{10.4}$$

Questa trattazione elementare si basa su una semplice approssimazione di F_3. Si osservi infatti che

$$SP = S\Omega + \Omega P = -r\mathbf{c_1} + x\mathbf{c_1} + y\mathbf{c_2} + z\mathbf{c_3}\,,$$

[5] Infatti la velocità angolare è "piccola". Anche la forza di Coriolis risulterà trascurabile poiché ci limiteremo qui a considerare il punto P di fatto in equilibrio.

[6] $\rho = |SP|$.

quindi

$$\rho^2 = SP \times SP = r^2 - 2rx + x^2 + y^2 + z^2$$

e, ricordando che

$$\mathbf{d} = \Omega P = x\mathbf{c_1} + y\mathbf{c_2} + z\mathbf{c_3}\,,$$

la 10.4 diviene

$$\mathbf{F_3} = \frac{-\gamma M}{\left(\sqrt{r^2 - 2rx + x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}(-r\mathbf{c_1} + \mathbf{d})\,. \tag{10.5}$$

La funzione che occorre approssimare è allora

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{r^2 - 2rx + x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}\,.$$

In questo senso si consideri lo sviluppo di ψ in serie di Mc Laurin troncata al 2° termine, ovvero $\big[(0) = (0, 0, 0)\big]$:

$$\psi(x, y, z) = \psi(0) + \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_0 x + \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_0 y + \left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_0 z + ... \tag{10.6}$$

dove si verifica subito che

$$\psi(0) = \frac{1}{r^3}\,, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_0 = \frac{3r}{r^5} = \frac{3}{r^4}\,, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_0 = \left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_0 = 0\,. \tag{10.7}$$

Risulta quindi

$$\psi = \frac{1}{\rho^3} = \frac{r + 3x}{r^4}$$

e la 10.5 diviene

$$\mathbf{F_3} = \gamma M\,\frac{r + 3x}{r^4}\,(r\mathbf{c_1} - \mathbf{d})\,.$$

In definitiva,

$$\mathbf{F_3} = \frac{\gamma M}{r^2}\mathbf{c_1} - \frac{\gamma M}{r^3}\mathbf{d} + \frac{\gamma M}{r^3}3x\,\mathbf{c_1} - \frac{\gamma M}{r^4}3x\,\mathbf{d}\,, \tag{10.8}$$

espressione in cui verrà trascurato l'ultimo addendo, coerentemente alla condizione 10.1 $xd \leq R^2_{\oplus}$.
Ne consegue allora che la forza complessiva agente sulla massa unitaria P è

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} = \frac{\gamma M}{d^3}\mathbf{d} + \frac{\gamma M}{r^3}\big[3x\mathbf{c_1} - \mathbf{d}\big]$$

e quindi

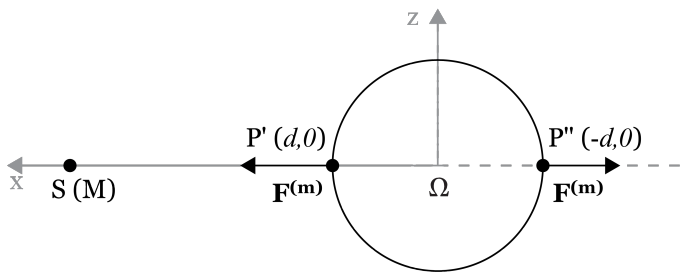
$$\mathbf{F} = \frac{\gamma M}{d^3}\mathbf{d} + \frac{\gamma M}{r^3}\big[3x\mathbf{c_1} - \mathbf{d}\big]\,. \tag{10.9}$$

10.2 Forze di marea

Prima di proseguire l'analisi sulle conseguenze generali dell'equazione 10.9, è bene osservare che la forza complessiva $\mathbf{F}$ agente sulla massa unitaria P è composta dall'attrazione gravitazionale della Terra e dalla forza

$$\mathbf{F}^{(m)} = \frac{\gamma M}{r^3}\left[3x\mathbf{c_1} - \mathbf{d}\right], \tag{10.10}$$

detta **forza di marea**.
Riferendoci alla figura del paragrafo precedente, consideriamo per maggiore chiarezza la sezione della Terra lungo il piano (Ω, x, z) e, in particolare, consideriamo i punti $P'(d, 0)$ e $P''(-d, 0)$.



Ricordando che $\mathbf{c_1}$ è il versore di x, da 10.10 seguono

$$\mathbf{F}^{(m)}_{P'} = \frac{2\gamma M d}{r^3}\mathbf{c_1} \tag{10.11}$$

e

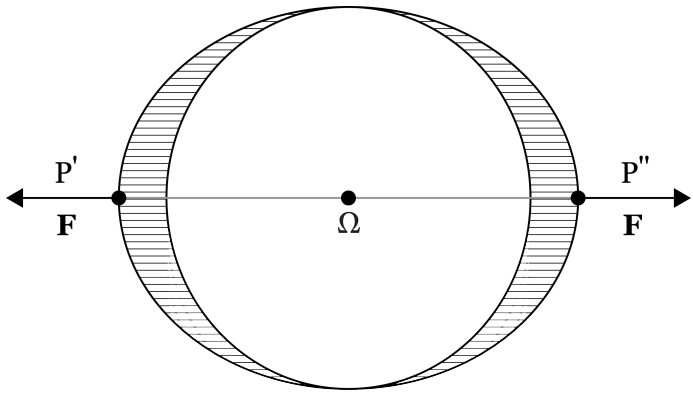
$$\mathbf{F}^{(m)}_{P''} = -\frac{2\gamma M d}{r^3}\mathbf{c_1}\,. \tag{10.12}$$

La forza di marea è allora rivolta verso S (il Sole o la Luna) in P', mentre è rivolta nel verso opposto in P'', con massimi agli antipodi rispetto alla congiungente $S\Omega$.

Sebbene con un procedimento alquanto diverso, questa fu essenzialmente la spiegazione che Newton diede dei fenomeni mareali e giustificò pienamente il fatto che il periodo delle maree sia di approssimativamente[7] 12 ore.

Newton spiegò il fenomeno delle maree in base alla sua teoria **dinamica**, oltre che gravitazionale. Il risultato fu di enorme importanza e consentì

[7] "Approssimativamente" perché il moto della Luna ne varia il periodo di circa 50 minuti.



a Newton di affermare che la sua teoria "*era in grado di spiegare e prevedere il moto delle terre e delle acque*" il che, per allora, era di fatto... una teoria del *TUTTO*!

10.2.1 Nota storica: Galileo e le maree

Galileo pensò di giustificare il fenomeno delle maree solo con la rotazione della Terra e con l'inerzia[8], ma non aveva gli "strumenti" di Newton. Keplero ritenne "centrale" il problema delle maree, ne intuì lo stretto legame con l'azione ed il moto della Luna, ma non ottenne risultati. Galileo ebbe infatti a dire di lui: "*Keplero fu, più di ogni altro uomo, geniale e indipendente... poi prestò troppa attenzione all'azione della Luna sulle acque, a cose misteriose e ad altre fanciullaggini del genere...*".
Il "razionalissimo" Galileo aveva ragione nel criticare alcune argomentazioni "misteriose" di Keplero, aveva però torto sulla questione delle maree.

Esercizi

1. Applicare le formule 10.10 e 10.11 per confrontare la forza di marea dovuta all'attrazione lunare con quella dovuta all'azione del Sole. Si troverà che
$$F_L^{(m)} = 2.2\, F_{\odot}^{(m)}\,.$$

2. Il periodo delle maree dovuto all'azione del Sole è, quasi, di 12 ore. Quello delle maree dovute alla Luna è diverso: c'è un ritardo giorna-

[8]Idea che gli venne dall'osservazione del moto dell'acqua (che a Venezia veniva spostata da grandi barche) sottoposta ad un'accelerazione (ad opera dei colpi dei remi).

liero del massimo (o del minimo) di marea pari a 52 minuti. Spiegare il perché.

3. In passato la Luna era più vicina alla Terra. Se fosse stata ad una distanza pari alla metà di quella media attuale, calcolare il rapporto $F_L^{(m)}/F_{\odot}^{(m)}$.

10.3 Quota di marea

Alla fine del Paragrafo 10.1 si era arrivati alla relazione (10.9) che consentiva il calcolo della forza agente sulla massa unitaria d'acqua posta sulla superficie dell'oceano. Non è difficile verificare che tale forza ammette potenziale[9]

$$\phi = \frac{\gamma M_{\oplus}}{d} + \frac{\gamma M}{r^3}\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{d^2}{2}\right].$$

Se la massa unitaria in P è in equilibrio sulla superficie oceanica all'istante considerato, allora deve risultare

$$\phi = \text{cost.}$$

E' naturale assumere tale costante uguale al valore di ϕ in assenza di perturbazioni mareali. Indicando quindi con $R_{\oplus}$ il raggio medio terrestre, si ottiene

$$\phi = \frac{\gamma M_{\oplus}}{d} + \frac{\gamma M}{r^3}\left[3x^2 - \frac{d^2}{2}\right] = \frac{\gamma M_{\oplus}}{R_{\oplus}}$$

e da questa si ricava subito

$$d - R_{\oplus} = \frac{M}{M_{\oplus}}\frac{R_{\oplus}}{r^3}d\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{d^2}{2}\right],$$

ovvero

$$d - R_{\oplus} = \frac{M}{M_{\oplus}}\frac{R_{\oplus}}{r^3}\frac{d^3}{2}\left[\frac{3x^2}{d^2} - 1\right].$$

Come sperimentalmente noto, $d - R_{\oplus}$ (detta quota di marea) è piccola ed è perciò lecito assumere

$$d^3 \cong R_{\oplus}^3 .$$

Ne deriva

$$\Delta h = d - R_{\oplus} = \frac{1}{2}\frac{M}{M_{\oplus}}\frac{R_{\oplus}^4}{r^3}\left[\frac{3x^2}{d^2} - 1\right] \tag{10.13}$$

[9] Si verifichi che $\vec{\nabla}\phi = \mathbf{F}$, con $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

che esprime la **quota di marea** nel punto P all'istante considerato. Introducendo coordinate polari sferiche associate a (Ω, x, y, z), si ha che

$$P(d\sin\theta\cos\phi, d\sin\theta\sin\phi, d\cos\theta)$$

e quindi, da 10.13, segue

$$\Delta h(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\frac{M}{M_\oplus}\frac{R_\oplus^4}{r^3}\left(3\,\sin^2\theta\,\cos^2\phi - 1\right), \tag{10.14}$$

che esprime la quota di marea in funzione di θ e ϕ. Attenzione però: le due variabili angolari non rappresentano qui la colatitudine e la longitudine, infatti z non è l'asse di rotazione terrestre, è l'asse perpendicolare al piano dell'orbita.
Si ha dunque che per un dato θ, il massimo di marea si ha quando $\phi = 0$ (o $\phi = \pi$) e il minimo quando $\phi = \frac{\pi}{2}$ (o $\phi = \frac{3}{2}\pi$), quindi il **dislivello di marea** (cioè la differenza tra la quota massima e minima) è

$$\Delta h_{max} = \frac{1}{2}\frac{M}{M_\oplus}\frac{R_\oplus^4}{r^3}\,3\sin^2\theta\,. \tag{10.15}$$

Giusto per verificare se la matematica e le approssimazioni corrispondono alle osservazioni, imponiamo $\theta = \pi/2$ nella 10.15 e analizziamo i seguenti casi:

a. siano $M = M_L = \frac{1}{81}M_\oplus$, $r = 385.000$ km e $R_\oplus = 6370$ km.
Si troverà così
$$\Delta h_{max}^{(L)} \cong 55\text{cm}\,.$$

b. siano $M = M_\odot = 2\times10^{30}$kg, $M_\oplus = 6\times10^{24}$kg e $r = 1.5\times10^{8}$km.
Si troverà così
$$\Delta h_{max}^{(\odot)} \cong 25\text{cm}\,.$$

Quindi, quando Sole e Luna si ritroveranno *allineati* con la Terra, si otterrà $\Delta h_{max} = 80$ cm, il che approssima bene l'andamento delle maree in pieno oceano nelle zone tropicali.
Dislivelli maggiori e minori sono dovuti a cause di tipo idrodinamico, mentre dislivelli eccezionali dell'ordine $15 - 20$m sono dovuti a fenomeni di *risonanza*[10].

Si ricorda infine che, per semplicità, non si è finora considerata la rotazione terrestre. Questa, come si vedrà nel prossimo paragrafo, fa avanzare il ventre di marea oltre la linea ΩS, con un angolo di avanzamento di circa $10°$.

[10] Si veda *"Gravità e spazio-tempo"* di J. Wheeler, Zanichelli (1997).

Esercizio

Calcolare Δh_L vicino ai poli ($\theta = 0, \pi$).

[$\Delta h \cong -20$ cm.]

10.4 Avanzamento del ventre di marea

Nell'analisi appena conclusa non è stata considerata la rotazione terrestre che, come accennato, determina un avanzamento del ventre di marea di un angolo $\phi_0 \cong 10°$: l'andamento è schematizzato in figura, proveremo ora a calcolarlo.

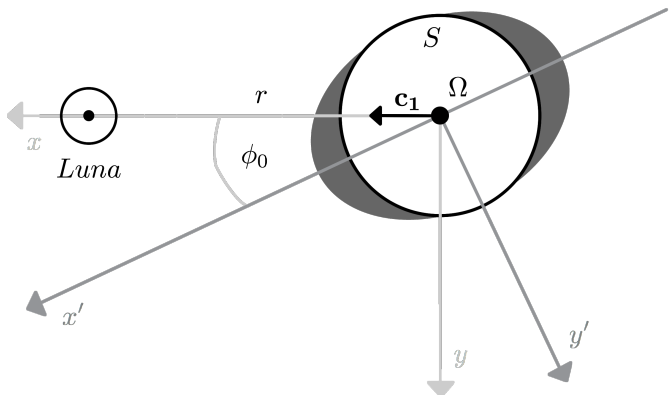


Figura 10.1: *Lo schema rappresenta una sezione sul piano* (Ω, x, y).

Si pensi alla Terra C come all'unione di due porzioni distinte: con S indicheremo la sfera di raggio medio $R_\oplus$, mentre con C^* indicheremo la deformazione di marea.
Il riferimento (Ω, x, y, z) ha origine nel baricentro Ω di C coincidente con il centro di S, sfera che penseremo omogenea. L'asse z sia l'asse di rotazione terrestre e $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3}$ siano i versori principali.
L'idea è quella di calcolare ϕ_0 sfruttando le formule del Paragrafo 10.2 e, per semplicità, supporremo che il sistema sia isolato, che z sia normale al

piano dell'orbita della Luna e che $M_\oplus \gg M_L$. [11]
L'equazione del momento della quantità di moto è

$$\frac{d\mathbf{K_\Omega}}{dt} = \mathbf{M_\Omega}\,, \tag{10.16}$$

in cui $\mathbf{M_\Omega}$ si riduce al momento delle forze di marea. Infatti, se $\mu\, dC$ è la massa di un elemento posto in $P \in C$, per quanto già chiarito si ha

$$\mathbf{M_\Omega^{apparenti}} \cong \int_C \mu\Omega P(-\mathbf{a}_\tau)\, dC\,.$$

Ma $\mathbf{a}_\tau \cong \mathbf{a_\Omega}$, perciò, dato che Ω è il baricentro di C,

$$\mathbf{M_\Omega^{apparenti}} \cong -\mathbf{a_\Omega} \wedge \int_C \mu\Omega P\, dC = 0\,.$$

Ne viene

$$\frac{d\mathbf{K_\Omega}}{dt} = \mathbf{M_\Omega}^{(m)} \tag{10.17}$$

e, proiettando sull'asse z,

$$I_\oplus \dot{\omega}_\oplus = \mathbf{M_\Omega}^{(m)} \times \mathbf{c_3}\,. \tag{10.18}$$

Come visto in 10.10 — dato $\Omega P = x\mathbf{c_1} + y\mathbf{c_2} + z\mathbf{c_3}$ — la forza di marea agente sull'elemento $\mu\, dC$ in P è

$$\mathbf{F^{(m)}}\, dC = \frac{\gamma M_L}{r^3}\Big[3x\mathbf{c_1} - \Omega P\Big] dC\,;$$

ne viene

$$\begin{aligned} \mathbf{M_\Omega^{(m)}} &= \frac{\gamma M_L}{r_3}\int_C \mu\Omega P \wedge \Big[3x\mathbf{c_1} - \Omega P\Big]\, dC \\ &= \frac{\gamma M_L}{r_3}\int_C \mu\Omega P \wedge 3x\mathbf{c_1}\, dC \end{aligned} \tag{10.19}$$

e quindi, da 10.18, si ha

$$I_\oplus \dot{\omega}_\oplus = -\frac{3\gamma M_L}{r^3}\int_C \mu xy\, dC\,. \tag{10.20}$$

Consideriamo l'integrale a secondo membro:

$$\int_C \mu xy\, dC = \int_S \mu xy\, dC + \int_{C*} \mu xy\, dC\,,$$

[11] Sono tutte semplificazioni ardite: l'angolo tra l'asse terrestre e la normale all'orbita varia tra 17° e 29°; inoltre il sistema non è isolato, ecc... ma proviamo ugualmente a vedere come andrà a finire!

è evidente che $\int_S xy\,dC = 0$ (per simmetria[12]) e quindi 10.20 diventa

$$I_\oplus \dot{\omega}_\oplus = -\frac{3\gamma M_L}{r^3}\int_{C*} \mu xy\,dC\,, \tag{10.21}$$

dove C^* rappresenta la *deformazione mareale*[13]
Come nel paragrafo 10.2, passando a coordinate polari troviamo

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \phi 2\pi \\ R_\oplus \le \rho \le R_\oplus + \Delta h \end{cases} .$$

Dall'equazione 10.21 limitiamoci a considerare l'integrale a secondo membro: in coordinate polari risulta[14]

$$\int_{C^*} \mu xy\,dC = \mu \int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \sin\phi\cos\phi\,d\phi \int_{R_\oplus}^{R_\oplus+\Delta h} \rho^4\,d\rho\,.$$

Infine — poiché Δh è "piccolo" — è lecito assumere $\rho^4 = R_\oplus^4$: l'integrale diviene pertanto

$$\int_{C^*} \mu xy\,dC = \mu \int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \sin\phi\cos\phi \cdot R_\oplus^4 \Delta h\,d\phi\,. \tag{10.22}$$

Si ricordi che Δh è fornita da 10.13 senza tener conto[15] dell'avanzamento ϕ_0 e deve quindi riscriversi così:

$$\Delta h = \frac{1}{2}\frac{M_L}{M_\oplus}\frac{R_\oplus^4}{r^3}\left[3\sin^2\theta\cos^2(\phi-\phi_0) - 1\right].$$

Questa, inserita nell'integrale 10.22, fornisce[16]

$$\int_{C^*} \mu xy\,dC = \frac{3}{2}\mu\frac{M_L R_\oplus^4}{M_\oplus r^3}\int_0^\pi \sin^5\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\cos^2\phi\sin 2\phi_0\,d\phi\,.$$

L'equazione 10.21 risulta quindi

$$\begin{aligned} I_\oplus\dot{\omega}_\oplus &= \frac{2}{5}M_\oplus R_\oplus^2\dot{\omega}_\oplus \qquad (10.23)\\ &= -\frac{9\gamma M_L}{2M_\oplus r^3}R_\oplus^8 \cdot \mu\int_0^\pi \sin^5\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\cos^2\phi\sin 2\phi_0\,d\theta \\ &= -\frac{9}{2}\gamma\mu\frac{M_L}{M_\oplus}R_\oplus^8\frac{15}{16}\cdot\frac{\pi}{4}\sin 2\phi_0\,. \end{aligned}$$

[12] E', tra l'altro, il momento di deviazione d'inerzia di una sfera omogenea.
[13] Che penseremo ridotta alla sola massa oceanica ($\mu \cong 1000$ kg/m^3).
[14] Con $x = \rho\sin\theta\cos\theta, y = \rho\sin\theta\sin\phi$ e $|\mathbf{j}| = \rho^2\sin\theta$ ecc.
[15] La 10.13, in questo caso, è riferita agli assi (Ω, x', y', z).
[16] Inserendo $\cos^2(\phi-\phi_0) = \cos^2\phi\cos^2\phi_0 + \sin^2\phi\sin^2\phi_0 + \cos\phi\sin\phi\sin 2\phi_0$, solo l'ultimo addendo dà un contributo non nullo.

Posto $I = \frac{2}{5} M_\oplus R_\oplus^2$ e $\dot{\omega} = -6 \times 10^{-22}$ rad/s^2 (vedi il Paragrafo 10.6, dove si analizza il rallentamento della rotazione terrestre), da 10.23 segue

$$\sin 2\phi_0 = 0.32$$

e cioé

$$\phi_0 = 9^\circ\ 3' \,, \tag{10.24}$$

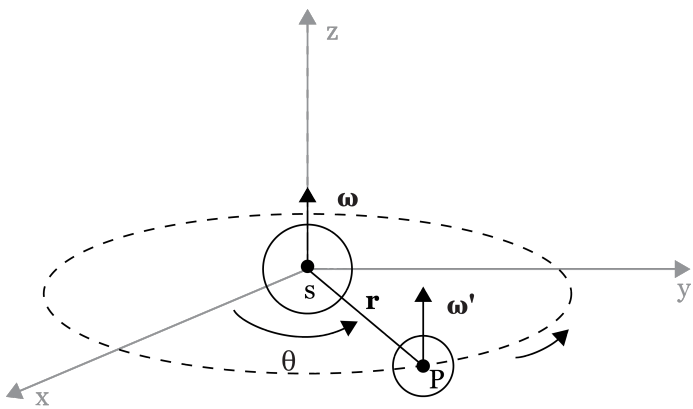
coerente con le osservazioni.

10.5 Effetti mareali: sistema primario-satellite

Si considerino due corpi celesti sferici, isolati e con distribuzione sferica di massa. Siano rispettivamente di massa M e m, centro in S e in P, e sia valida la condizione

$$M \gg m \,. \tag{10.25}$$

Definiamo *primario* il corpo di massa M, mentre quello di massa m verrà detto secondario, o *satellite*.



Quanto visto a proposito del problema dei due corpi ci assicura che, rispetto ad una terna con origine in S, e assi invariabili rispetto alle galassie, il moto di P è una conica.
Assumeremo la terna (S, x, y, z) in modo che (S, x, y) sia il piano dell'orbita, supporremo inoltre tale orbita circolare e di raggio r. I due corpi M e m abbiano velocità angolari $\vec{\omega}$ e $\vec{\omega}'$ che — per ora — supporremo parallele ed equiverse all'asse z.

I due corpi celesti non sono rigidi e, pur mantenendo l'ipotesi della sfericità nelle successive approssimazioni, li penseremo soggetti a vicendevoli forze di marea nonché, quindi, a deformazioni mareali che determinano una perdita di energia meccanica del sistema a causa degli enormi attriti, energia dispersa nello spazio sotto forma di calore. Si produce così una ridistribuzione del momento angolare tra i due corpi.

Dette (r, θ) le coordinate polari di P, $\dot{\theta}$ rappresenta la velocità angolare di rivoluzione di P (cioè del satellite) intorno ad S. Vogliamo dimostrare che — in un tempo sufficientemente lungo — gli effetti mareali porteranno a

$$\omega = \omega' = \dot{\theta}\,. \tag{10.26}$$

In altre parole ciò che si vuole dimostrare è che dopo un tempo opportuno i due corpi (primario e satellite) mostreranno l'un l'altro sempre la stessa "faccia" e, a quel punto, cesserà ovviamente ogni effetto mareale. Il fenomeno comporta una variazione di r — con $\dot{r}$ piccolo a sufficienza — tale da consentirci di considerare l'orbita, istante per istante, praticamente circolare.
Si ricordi infine che l'ipotesi 10.25 ci permetterà di trattare la terna (S, x, y, z) come inerziale.

Dimostrazione

L'energia del sistema è $E = T - U$ e, con ovvio significato dei simboli,

$$E = T^{(M)} + T^{(m)} - \gamma \frac{mM}{r}\,.$$

Indicati con I e I' i momenti di inerzia dei due corpi rispetto all'asse di rotazione, si ha

$$T^{(M)} = \frac{I}{2}\omega^2\,, \qquad T^{(m)} = \frac{I'}{2}\omega'^2 + \frac{1}{2}mv_p^2\,,$$

dove $T^{(m)}$ è stato ottenuto applicando il il teorema di König; ne segue quindi

$$E = \frac{I}{2}\omega^2 + \frac{I'}{2}\omega'^2 + \frac{1}{2}mv_p^2 - \gamma\frac{mM}{r}\,. \tag{10.27}$$

Ricordando che per l'orbita circolare

$$mv_p^2 = \frac{\alpha}{r}\,, \tag{10.28}$$

con

$$\alpha = \gamma m M \,, \tag{10.29}$$

da 10.27 segue

$$E = \frac{I}{2}\,\omega^2 + \frac{I'^2}{2}\,\omega'^2 - \frac{\alpha}{2r}\,. \tag{10.30}$$

Tuttavia, per quanto già accennato, E non è costante. E' invece costante il momento della quantità di moto: infatti il sistema è isolato ed il riferimento può considerarsi inerziale, quindi $\mathbf{M}_S^{(e)} = 0$. Ne consegue

$$\mathbf{k_s} = \mathbf{k_s}^{(M)} + \mathbf{k_s}^{(m)} = \text{ cost.}$$

E' evidente che

$$\mathbf{k_s}^{(M)} = I\vec{\omega} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{k_s}^{(m)} = \mathbf{k_p}^{(m)} + SP \wedge m\mathbf{v_p} = I'\vec{\omega'} + SP \wedge m\mathbf{v_p}\,,$$

quindi risulta

$$\mathbf{k_s} = I\vec{\omega} + I'\vec{\omega'} + SP \wedge m\mathbf{v_p}\,. \tag{10.31}$$

Nel moto circolare[17]

$$v_p = r\dot{\theta} \tag{10.32}$$

e quindi, per proiezione sull'asse z, si ha

$$k = I\omega + I'\omega' + mr^2\dot{\theta} = \text{cost.} \qquad (> 0) \tag{10.33}$$

o, in altri termini,

$$mr^2\dot{\theta} = k - I\omega - I'\omega'\,. \tag{10.34}$$

Da questa segue evidentemente

$$\frac{m\alpha^2}{(mr^2\dot{\theta})^2} = \frac{m\alpha^2}{(k - I\omega - I'\omega')^2} \tag{10.35}$$

e, di conseguenza,

$$\frac{m\alpha^2}{(k - I\omega - I'\omega')^2} = \frac{m\alpha^2}{(mr^2\dot{\theta})^2} = \frac{\alpha^2}{mr^2(r\dot{\theta})^2} = \frac{\alpha^2}{mr^2 v_p^2}\,. \tag{10.36}$$

Sostituendo nell'ultimo termine $mv_p^2 = \alpha/r$ (vedi 10.28) risulta

$$\frac{m\alpha^2}{(k - I\omega - I'\omega')^2} = \frac{\alpha}{r}\,. \tag{10.37}$$

[17] $\dot{\theta}$ si ipotizza positivo.

Da quest'ultima segue

$$r = \frac{(k - I\omega - I'\omega')^2}{m\alpha} \tag{10.38}$$

e, sostituendo tale valore di r nella 10.34, viene

$$\dot{\theta} = \frac{m\alpha^2}{(k - I\omega - I'\omega')^3}\,. \tag{10.39}$$

Ricordando l'espressione 10.30 dell'energia, e sostituendo il valore α/r fornito da 10.37, risulta in definitiva

$$E = \frac{I}{2}\omega^2 + \frac{I'}{2}\omega'^2 - \frac{m\alpha^2}{2(k - I\omega - I'\omega')^2}\,. \tag{10.40}$$

Si è così espressa l'energia in funzione delle sole ω e ω', il che consente un facile studio dei punti di stazionarietà e di minimo dell'energia. Se però non si fosse eliminata la variabile r, tale studio sarebbe risultato effettivamente complicato[18].

Le **condizioni di stazionarietà** dell'energia E si ottengono subito dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \omega} = I\omega - \frac{m\alpha^2 I}{(k-I\omega-I'\omega')^3} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \omega'} = I'\omega' - \frac{m\alpha^2 I'}{(k-I\omega-I'\omega')^3} = 0 \end{cases} \tag{10.41}$$

che fornisce[19]

$$\omega = \omega' = \frac{m\alpha^2}{(k - I\omega - I'\omega')^3} = \dot{\theta}\,. \tag{10.42}$$

In conclusione, l'energia è stazionaria quando le velocità angolari dei due corpi sono uguali tra di loro e alla velocità angolare di rivoluzione. Ciò significa che primario e satellite si mostreranno vicendevolmente sempre la stessa faccia e, a questo punto, finirà ogni effetto mareale.

[*c.v.d.*]

Ora si tratta di verificare:

a. se e sotto quali condizioni esistano "punti" di stazionarietà per E;

b. se e sotto quali condizioni esistano "punti" di minimo dell'energia E;

c. quale sia l'evoluzione del sistema a causa degli effetti mareali.

[18] Come infatti affermano Barbieri — in *Lezioni di Astronomia* (ed. Zanichelli), pag. 375 — e Graffi — in *Meccanica razionale* (ed Patron) — ed altri che affrontano lo stesso problema (senza risolverlo esplicitamente).

[19] Vedi 10.39.

10.5.1 Stazionarietà e minimo dell'energia

Dalla 10.42 risulta evidente che sussiste la stazionarietà dell'energia se e solo se l'equazione

$$\left[k - (I + I')\omega\right]^3 \omega - m\alpha^2 = 0 \tag{10.43}$$

ha soluzioni positive e se, detta ω una tale soluzione, $E(\omega, \omega')$ è stazionaria in (ω, ω).
Posto

$$\mathcal{I} = I + I' \,,$$

la 10.43 diviene

$$(k - \mathcal{I}\omega)^3 \omega - m\alpha^2 = 0 \,, \tag{10.44}$$

in cui $k > \mathcal{I}\omega$ perché si è supposto $\dot{\theta} > 0$ (vedi 10.33 e 10.39).
Un semplice studio della funzione $f(\omega)$ a primo membro della 10.44 mostra che esistono due radici positive se

$$k > \frac{4}{3}\sqrt[4]{3m\alpha^2\mathcal{I}} \,. \tag{10.45}$$

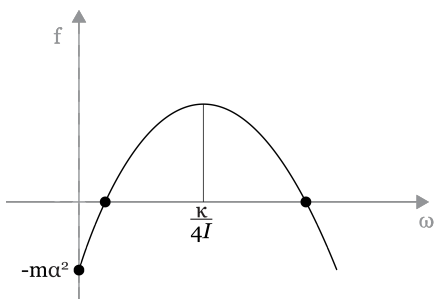
Infatti derivando $f(\omega)$ si ha

$$f'(\omega) = 3(k - \mathcal{I}\omega)^2(k - 4\mathcal{I}\omega) \,,$$

da cui segue che $f(\omega)$ ha un massimo in $\omega = k/4\mathcal{I}$ e che, per 10.45, tale massimo è positivo. Tenendo poi conto che

$$f(0) = -m\alpha^2 \qquad < 0 \,,$$

si giunge a due radici positive dell'equazione 10.44, risultato che risponde quindi al quesito (**a.**) rimasto aperto dal paragrafo precedente.



Il quesito (**b.**) comporta ora lo studio dei minimi della funzione $E(\omega, \omega')$ (vedi 10.40), ma non sarebbe difficile provare che

1. la più piccola delle radici di 10.43 corrisponde ad un minimo: indichiamola con ω_m. Ciò significa che $E(\omega_m, \omega_m)$ è *minima* [vedi paragrafo 10.5.2].

2. l'altra radice positiva non corrisponde né ad un massimo, né a un minimo dell'energia. Ciò avviene anche nel caso di radici coincidenti.

Infine, al quesito (**c.**) si risponderà trattando il caso concreto dell'evoluzione del sistema Terra-Luna, *vincolato* però nelle ipotesi delineate all'inizio.

10.5.2 Esistenza di un minimo per l'energia

Come si è dimostrato, l'equazione 10.44 fornisce soluzioni

$$0 < \omega_1 < \frac{k}{4(I + I')} < \omega_2$$

che definiscono due punti di stazionarietà per l'energia E — (ω_1, ω_1) e (ω_2, ω_2) — purché valga

$$k > \frac{4}{3}\sqrt[4]{3m\alpha^2(I + I')}\,. \tag{10.46}$$

Calcolando le derivate seconde di $E(\omega, \omega')$, vedi 10.41, si ottiene che l'Hessiano in un punto (ω, ω) è

$$H(\omega, \omega) = II'\left(1 - \frac{3m\alpha^2(I + I')}{(k - (I + I')\omega)^4}\right),$$

dove tale Hessiano è positivo se e solo se

$$k - (I + I')\omega > \sqrt[4]{3m\alpha^2(I + I')}\,. \tag{10.47}$$

Se la precedente è verificata per una soluzione ω dell'equazione 10.44, certamente (ω, ω) è un *minimo* per l'energia E, infatti

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \omega^2} = I\left(1 - \frac{3m\alpha^2 I}{(k - (I + I')\omega)^4}\right) > 0$$

se vale 10.47, a maggior ragione dato che $I' > 0$. Sarà quindi sufficiente verificare che la radice minore ω_1 di 10.44 soddisfa 10.47 per concludere che (ω_1, ω_1) è punto di minimo per E. Per verificarlo si ricordi

$$\omega_1 < \frac{k}{4(I + I')}\,, \qquad \text{ovvero } (I + I')\omega_1 < \frac{k}{4}\,,$$

quindi, in virtù di 10.46,

$$k - (I + I')\omega_1 > k - \frac{k}{4} = \frac{3}{4}k > \sqrt[4]{3m\alpha^2(I + I')}\,.$$

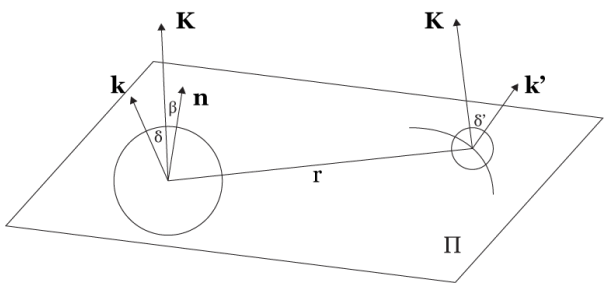
Si conclude che 10.47 è vera per $\omega = \omega_1$, dove ω_1 è la radice minore[20].

10.5.3 Una seconda schematizzazione

Abbiamo sviluppato un primo schema in cui il primario ed il satellite hanno velocità angolari **normali** al piano dell'orbita. Sempre attenendoci all'orbita circolare[21], consideriamo ora il caso in cui gli assi di rotazione siano inclinati sul piano dell'orbita.
Sia

$$\mathbf{K} = mr^2\dot{\theta}\mathbf{n} + I\omega\mathbf{k} + I'\omega'\mathbf{k}'$$

il momento della quantità di moto che, pur rimanendo costante, non è più ortogonale al piano dell'orbita Π.



Essendo $\mathbf{n}$ il versore normale a Π (come rappresentato in figura), varranno le seguenti

$$\begin{cases} \mathbf{n}\,\mathrm{vers}(\mathbf{K}) = \cos\beta \\ k \cdot \mathrm{vers}(\mathbf{K}) = \cos\delta \\ k' \cdot \mathrm{vers}(\mathbf{K}) = \cos\delta' \end{cases}$$

in cui penseremo $\beta, \delta, \delta' < \frac{\pi}{2}$. Vogliamo provare che, per effetti mareali, l'energia meccanica arriverà ad un minimo caratterizzato da

$$\omega = \omega' = \dot{\theta} \qquad \text{e} \qquad \beta = \delta = \delta' = 0\,.$$

[20] Indicata con ω_m nel paragrafo seguente.
[21] Il caso dell'orbita ellittica è molto più complicato.

In una condizione di minimo energetico:

1. le velocità angolari sono uguali in modulo sia tra loro che con la velocità di rivoluzione;
2. le velocità angolari sono parallele tra loro e con la normale al piano dell'orbita;
3. la normale al piano dell'orbita è la direzione del momento **K**.

Ci limiteremo qui a dimostrare che ciò vale in un punto di stazionarietà per l'energia. Il modulo di **K** è[22]

$$K = K' \cos\beta + I\omega \cos\delta + I'\omega' \cos\delta' \,, \tag{10.48}$$

che è costante. L'espressione dell'energia — come noto — è

$$E = -\frac{1}{2}\frac{m\alpha^2}{K'^2} + \frac{I}{2}\omega^2 + \frac{I'}{2}\omega'^2$$

dove, in questo caso,

$$K' = \frac{K - I\omega\cos\delta + I'\omega'\cos\delta'}{\cos\beta} \,,$$

come segue da 10.48. Quindi E può scriversi in funzione di $\omega, \omega', \beta, \delta, \delta'$ nel modo seguente:

$$E = \frac{m\alpha^2\cos^2\beta}{2(K - I\omega\cos\delta + I'\omega'\cos\delta')^2} + \frac{I}{2}\omega^2 + \frac{I'}{2}\omega'^2 \,. \tag{10.49}$$

Dunque, in un punto di stazionarietà, si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial \omega} &= \frac{m\alpha^2(\cos\beta)^2 I\cos\delta}{(K - I\omega\cos\delta + I'\omega'\cos\delta')^3} + I\omega = 0 \,, \\
\frac{\partial E}{\partial \omega'} &= \frac{m\alpha^2(\cos\beta)^2 I\cos\delta'}{(K - I\omega\cos\delta + I'\omega'\cos\delta')^3} + I'\omega' = 0 \,, \\
\frac{\partial E}{\partial \beta} &= \frac{m\alpha^2\cos\beta}{(K - I\omega\cos\delta + I'\omega'\cos\delta')^2}\sin\beta = 0 \,, \\
\frac{\partial E}{\partial \delta} &= \frac{m\alpha^2(\cos\beta)^2 I\omega}{(K - I\omega\cos\delta + I'\omega'\cos\delta')^3}\sin\delta = 0 \,, \\
\frac{\partial E}{\partial \delta'} &= \frac{m\alpha^2(\cos\beta)^2 I'\omega'}{(K - I\omega\cos\delta + I'\omega'\cos\delta')^3}\sin\delta' = 0 \,.
\end{aligned}$$

Dalle ultime tre equazioni segue $\beta = \delta = \delta' = 0$: con tali valori si ha $\omega = \omega'$ e quindi, come prima, si ottiene

$$\omega = \omega' = \dot{\theta} \qquad \text{c.v.d.}$$

[22] $K' = mr^2\dot{\theta}$.

10.6 Evoluzione del sistema Terra-Luna

Analizziamo brevemente le condizioni del sistema Terra-Luna: si tratta di un sistema non isolato in cui l'orbita lunare è ellittica (e quindi non circolare!) e che non giace sul piano equatoriale. Inoltre i vettori $\vec{\omega} = \vec{\omega_\oplus}$ e $\vec{\omega}' = \vec{\omega_L}$ non sono paralleli.
Nessuna delle ipotesi fatte nel paragrafo 10.4 è quindi soddisfatta per tale sistema, eppure un insieme di condizioni astronomiche — in parte compensative, ma si rinvia a testi specifici per ulteriori approfondimenti — rendono non implausibile lo schema che abbiamo usato.
Ne deriva che, oltre al fatto che la Luna mostri già la stessa faccia alla Terra, si verificherà anche un rallentamento della rotazione terrestre fino al realizzarsi della condizione 10.42, ovvero

$$\omega_\oplus = \omega_L = \dot{\theta}\,, \qquad ^{23}$$

che corrisponde ad un minimo energetico del sistema, con conseguente cessazione degli effetti di marea. Le maree terrestri si ridurrebbero allora a quelle determinate dal Sole.
Si tratta allora di determinare le soluzioni dell'equazione 10.44, cioé

$$(k - \mathcal{I}\omega)^3\omega = m\alpha^2\,, \tag{10.50}$$

in cui $m = M_\oplus/81$ è la massa della Luna, $\alpha = \gamma m M_\oplus$ e, utilizzando le unità MKS, $\mathcal{I} \sim I_\oplus = 0.8 \times 10^{38}$.
Nello specifico assumeremo $M_\oplus = 5.97 \times 10^{24}$, $\omega_\oplus = 7.27 \times 10^{-4}$, $R_\oplus = 6.37 \times 10^6$, $\dot{\theta} = 2.66$ e $r = 3.84 \times 10^8$. Con tali valori, da 10.33 risulta

$$k = 3.46 \times 10^{34}\,, \tag{10.51}$$

mentre[24]

$$m\alpha^2 = 0.622 \times 10^{98}\,.$$

Da 10.50, con una semplice approssimazione per il valore più piccolo di ω_m, segue:

$$\omega_m \cong 1.5 \times 10^{-6} \text{ rad/s} \tag{10.52}$$

che corrisponde al **minimo energetico**. Il **periodo della rotazione** corrispondente sarà inoltre

$$T_m = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2\pi}{1.5}10^6 \text{ s} \cong 48 \text{ giorni}\,. \tag{10.53}$$

[23] Con $\dot{\theta}$ si è indicata la velocità angolare di rivoluzione lunare.
[24] Si osservi che la 10.45 è vera nel caso Terra-Luna.

La **distanza Terra-Luna** al minimo energetico, fornita da 10.38, è invece

$$r_m = \frac{(k - \mathcal{I}\omega_m)^2}{m\alpha} \cong 560.000 \text{ km}\,, \tag{10.54}$$

quindi, al minimo energetico, la Luna sarebbe circa 175.000 km più lontana dalla Terra di quanto non lo sia ora.

E' invece difficile quantificare il tempo necessario al sistema Terra-Luna per arrivare a tale minimo energetico. Per averne un'*idea* si può procedere come segue: trascurando nella 10.38 il termine $I'\omega'$, che è piccolo rispetto a $I\omega = \mathcal{I}\omega$, si ha

$$r = \frac{(k - \mathcal{I}\omega)^2}{m\alpha}$$

che, per derivazione, fornisce

$$\dot{r} = -\frac{2\mathcal{I}(k - \mathcal{I}\omega)}{m\alpha}\dot{\omega}\,. \tag{10.55}$$

Da misure dirette è noto il valore attuale di $\dot{\omega}$, circa -6×10^{-22} rad/s^2. Con tale valore — che, si badi bene, non sarà certamente costante — da 10.55 si ottiene

$$\dot{r} \cong 5 \text{ cm/anno} \tag{10.56}$$

che, in altre parole, esplicita che il **raggio dell'orbita lunare** aumenta (attualmente!) di circa 5 cm all'anno, valore coerente con le osservazioni. Supponendo costante nel futuro tale valore di $\dot{r}$ (ipotesi certamente non fondata) possiamo ottenere il **tempo** in cui il sistema raggiungerà il minimo energetico:

$$t_m = \frac{s}{v} = \frac{175.000 \text{ km}}{\dot{r}} \cong 3.5 \times 10^9 \text{ anni}\,,$$

ovvero 3.5 miliardi di anni[25].

Per concludere, l'equazione $(k - \mathcal{I}\omega)^3\omega = m\alpha^2$ ammette, come si è visto, una seconda radice positiva. Con una tecnica diversa da quella usata per trovare ω_m (ma altrettanto rudimentale), si trova

$$\omega^* \cong 3.6 \times 10^{-4} \text{ rad/s}\,,$$

a cui corrisponde il periodo

$$T^* = \frac{2\pi}{3.6}10^4 \cong 5 \text{ ore!}$$

[25] Calcoli più accurati portano ad un tempo molto più lungo

Il raggio dell'orbita lunare sarebbe addirittura stato

$$r^* \cong 15.000 \text{ km}^{26} ,$$

ma che l'orbita della Luna sia stata così vicina alla Terra appare estremamente improbabile e, comunque, tutto questo rimane avvolto nel *mistero* dell'origine del sistema Terra-Luna.

Osservazione

Si può calcolare r_m usando la formula

$$v_p = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\gamma M_\oplus}{r}} ,$$

ricordando la velocità dell'orbita circolare. Ne viene

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_\oplus}{\dot{\theta}^2}}$$

pertanto, al minimo energetico ($\dot{\theta} = \omega_m$, vedi 10.42),

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_\oplus}{\omega_m^2}} .$$

Esercizi

1. Pensando che la Luna sia stata distante 64.000 km, e ipotizzando la Terra allo stato attuale[27], quale sarebbe stato il dislivello delle maree?

   [120 m]

2. Osservazioni su fossili di corallo vissuti 400 milioni di anni fa, in particolare osservazioni sul loro accrescimento (che è solo diurno), mostrano che la durata del giorno era di circa 20 ore. Questo dato è coerente con il nostro schema?

   [Sì, $T \cong 19$ h.]

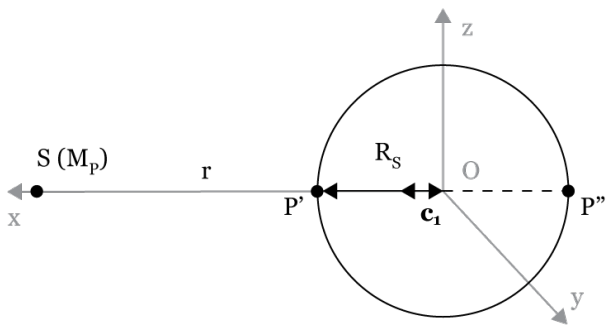
[26] In pratica sotto il *limite di Roche*.
[27] ...acqua.

10.7 Limite di Roche

La definizione classica che si trova nei libri di astronomia[28] è la seguente: "*il limite di Roche è la distanza tra primario e satellite*[29] *tale per cui la forza di marea esercitata dal primario eguagli la forza di gravità sulla superficie del satellite*" e quindi, in altri termini, è la distanza oltre la quale un corpo, posto sulla superficie del satellite, tende a *staccarsi* dalla superficie stessa.
Proveremo ora a calcolarlo.

Premessa

Poniamoci sul satellite in un riferimento — come quello usato nel calcolo delle maree terrestri — con origine nel baricentro del satellite omogeneo o a simmetria sferica (al pari del primario) di raggio R_s, massa M_s e con l'asse x rivolto verso il baricentro S del primario – di massa M_p, raggio R_p e con l'asse z rivolto verso le galassie.



Sia $M_p \gg M_s$ e si supponga che il satellite si mantenga sensibilmente sferico[30].

[28] Ad esempio *Barbieri*, "Lezioni di Astronomia", ma questo testo (ed altri) non affrontano i calcoli.
[29] Ovvero la distanza tra i baricentri.
[30] Pensiamo cioé a quote di marea trascurabili.

Calcolo approssimato

Trascuriamo per ora la forza centrifuga dovuta alla rivoluzione *apparente* di S (il riferimento non è inerziale!). Uguagliando la forza di marea in P' (o in P'') con quella gravitazionale del satellite su una massa unitaria in P', si ottiene

$$\frac{2\gamma M R_s}{r^3} = \frac{\gamma M_s}{R_s^2} \qquad \text{dove } r = |OS|\,. \tag{10.57}$$

Se ρ_s e ρ_p sono le densità rispettivamente del satellite e del primario, segue

$$\frac{R_s}{r^3} = \frac{M_s}{2M} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_s^3 \rho_s}{\frac{8}{3}\pi R_p^3 \rho_p}$$

da cui

$$r_{Roche} = 2^{1/3} R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3} \tag{10.58}$$

e quindi

$$r_{Roche} = 1.26\, R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3}, \tag{10.59}$$

un risultato non coerente con quanto afferma John Gribbin: *"Se un satellite che orbita intorno ad un pianeta*[31] *si avvicina a meno di* $2.456\, R_p$*, il satellite verrà frantumato dalle forze di marea. Questo è il limite di Roche."*
Secondo i nostri calcoli, a pari condizioni, risulta invece:

$$r_{Roche} = 1.26\, R_p$$

e questo per il solo "sollevamento" di massa in superficie. Insomma, non va bene.

Calcolo più accurato

Per aumentare la precisione del calcolo terremo ora conto della forza centrifuga. Ciò è necessario nel caso di satelliti con orbita molto vicina al primario e, quindi, con elevata velocità angolare orbitale (la ω_τ del riferimento).

[31] Sufficientemente "grosso" e con la stessa densità. Un satellite, o un pianeta, di massa $M > 10^{21}$ kg è, in generale, praticamente sferico e l'energia di legame è essenzialmente dovuta alla gravità.

Sia $\vec{\omega}_\tau = \omega_\tau \mathbf{c_3}$ la velocità angolare di rivoluzione: la forza centrifuga in P' — con $m = 1$ — è

$$\mathbf{F} = \omega^2 R_S \mathbf{c_1}$$

ed il limite di Roche sarà dunque fornito dall'equazione

$$\frac{2\gamma M_p R_s}{r^3} + \omega^2 R_s = \frac{\gamma M_s}{R_s^2} \,. \tag{10.60}$$

Pensando l'orbita di forma circolare, la velocità è

$$v_c = r\omega = \sqrt{\frac{\gamma M_p}{r}} \,,$$

da cui

$$\omega^2 = \frac{\gamma M_p}{r^3} \,.$$

Sostituendo in 10.60 segue

$$\frac{2\gamma M_p R_s + \gamma M_p R_s}{r^3} = \frac{\gamma M_s}{R_s^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3M_p}{r^3} = \frac{M_s}{R_s^3} \,. \tag{10.61}$$

Esprimendo la massa mediante $\rho \cdot V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$,

$$r_{Roche} = 3^{1/3} R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{\frac{1}{3}}$$

e quindi, per $\rho_s = \rho_p$,

$$r_{Roche} = 1.443\, R_p \,. \tag{10.62}$$

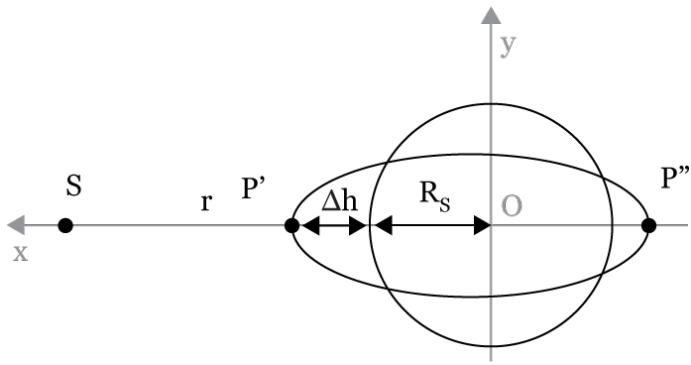
Siamo dunque ancora molto lontani da $r_{Roche} = 2.456\, R_p$.

Un ultimo tentativo, con forzatura

Finora abbiamo considerato ininfluenti le deformazioni mareali sul satellite, considerato sempre sferico. Tuttavia le deformazioni mareali possono essere imponenti e quindi cercheremo di tenerne conto.

Se Δh è la quota di marea in P', la 10.60 può essere modificata in

$$\frac{2\gamma M_p}{r^3}(R_s + \Delta h) + \frac{\gamma M_p}{r^3}(R_s + \Delta h) = \frac{\gamma M_s}{(R_s + \Delta h)^2} \,. \tag{10.63}$$



Ne viene

$$\frac{3M_p(R_s+\Delta h)}{r^3} = \frac{M_s}{(R_s+\Delta h)^2} \qquad \overset{\rho_s=\rho_p}{\Rightarrow} \qquad 3R_p^3(R_s+\Delta h)^3 = R_s^3 r^3\,, \tag{10.64}$$

essendo in P' (vedi l'equazione 10.15[32])

$$\Delta h = \frac{3}{2}\frac{M_p}{M_s}\frac{R_s^4}{r^3} = \frac{3}{2}R_s\frac{R_p^3}{r^3} \qquad (\rho_s=\rho_p)\,.$$

Da 10.64 risulta

$$\sqrt[3]{3}\left[1+\frac{3}{2}\left(\frac{R_p}{r}\right)^3\right] = \frac{r}{R_p}\,, \tag{10.65}$$

equazione in r/R_p che *dovrebbe* fornire $r/R_p = 2.456$, cosa che invece non fa perché da 10.65 segue $r/R_p \cong 1.808$.

Più in generale, qualora le densità di primario e satellite fossero diverse, risulterebbe

$$r_{Roche} = 1.808\,R_p\left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3}. \tag{10.66}$$

Conclusioni

Possiamo allora riassumere quanto visto finora come segue:

[32] Equazione dedotta per un fluido. Gli effetti gravitazionali di un ellissoide sarebbero inoltre diversi. (L'approssimazione rimane accettabile?)

- siamo partiti da una **definizione** di *limite di Roche* (in premessa);
- l'**osservazione** conferma che un satellite ("abbastanza grosso"), che si avvicini sufficientemente al primario, viene frammentato dalle forze di marea;
- abbiamo stabilito un **modello**, poi raffinato nei vari paragrafi;
- abbiamo fatto i **calcoli** arrivando al risultato 10.62 e poi 10.66.

Tuttavia *Gribbin* e *Barbieri*[33] dicono — e ci fidiamo di loro — che

$$r_{Roche} = 2.456\, R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3},$$

da cui si deduce che qualcosa non va: cosa?
L'approfondimento della questione è lasciata allo studente[34].

10.8 Il rigonfiamento equatoriale della Terra

Netwon sostenne che la Terra fosse un ellissoide rigonfiato all'equatore, mentre l'astronomo Giovanni Cassini lo riteneva rigonfiato ai poli.
Nel 1738 venne finalmente organizzata una spedizione al circolo polare artico per dirimere quest'annosa questione e il capo scientifico del progetto fu Pierre Louis de Maupertuis: il compito consisteva nel misurare g e confrontarne le variazioni con la latitudine.

La previsione teorica di Netwon era

$$\delta = \frac{R_{eq} - R_{polo}}{R_\oplus} = \frac{1}{230} \cong 4.3 \times 10^{-3}\,, \tag{10.67}$$

equivalente a $R_{eq} - R_{polo} \cong 22$ km[35] e — dopo più di due anni trascorsi in Lapponia — Maupertuis riuscì a confermare la tesi di Newton. Al suo

[33] *Barbieri* considera, a seconda della composizione del satellite,

$$2\, R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3} < r_{Roche} < 2.5\, R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3}.$$

[34] Osservazione didattica: nell'anno di questa esercitazione (2004) sono state formate "squadre" di cinque studenti ciascuna: coloro che avessero approfondito meglio l'argomento avrebbero ricevuto punti extra all'esame. I risultati furono soddisfacenti.

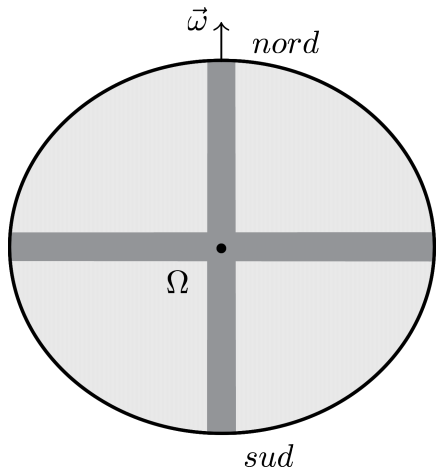
[35] Misure attuali indicano

$$\delta = \frac{R_{eq} - R_{polo}}{R_\oplus} = \frac{1}{294} \cong 3.4 \times 10^{-3}\,, \tag{10.68}$$

equivalente a $R_{eq} - R_{polo} \cong 28$ km.

ritorno lo accolse un epigramma di Voltaire: *"Vous avez confirmé dans ces lieux pleins d'ennui - Ce que Newton connut sans sortir de chez lui"*!

Era nota la statica dei fluidi, così Newton immaginò che all'interno della Terra (intesa omogenea) vi fossero due tunnel, l'uno collegante i due poli, l'altro due estremi dell'equatore e immaginò di riempirli d'acqua.
Sia $R_\oplus$ il raggio medio della Terra, g_{polo} l'accelerazione di gravità al polo, g_{eq} l'accelerazione di gravità all'equatore e g l'accelerazione di gravità superficiale media.



Coerentemente con la sua legge di gravitazione, Newton calcolò che l'accelerazione di gravità varia linearmente all'interno della Terra: posto

$$\frac{R_{eq} - R_{polo}}{R_\oplus} = \delta\,, \tag{10.69}$$

e poiché $R_\oplus = \frac{1}{2}(R_{eq} + R_{polo})$, da 10.69 segue

$$R_{eq} = (1 + \frac{\delta}{2})R_\oplus \qquad \text{e} \qquad R_{polo} = (1 - \frac{\delta}{2})R_\oplus\,. \tag{10.70}$$

Newton considerò che l'acqua avrebbe dovuto essere in equilibrio — e quindi uguale la pressione al centro della Terra — pertanto

$$\begin{aligned} g_{polo} \cdot R_{polo} &= g_{eq} \cdot R_{eq} - \omega^2 R_\oplus R_{eq} \\ &\cong g_{eq} \cdot R_{eq} - g_{eq}\frac{\omega^2 R_\oplus}{g} R_{eq}\,. \end{aligned} \tag{10.71}$$

Sostituendo 10.70 in 10.71,

$$g_{polo} - \frac{\delta}{2} g_{polo} = g_{eq} + \frac{\delta}{2} g_{eq} - g_{eq} \frac{\omega^2 R_\oplus}{g} - \frac{g_{eq}}{g} \frac{\delta}{2} \omega^2 R_\oplus$$

e, eliminando l'ultimo addendo[36],

$$\frac{\delta}{2}(g_{polo} + g_{eq}) = -g_{eq} + g_{polo} + g_{eq} \frac{\omega^2 R_\oplus}{g} \, .$$

Poiché $g_{polo} + g_{eq} \cong 2g_{eq}$, si arriva a

$$\delta \cong \left(-1 + \frac{g_{polo}}{g_{eq}} \right) + \frac{\omega^2 R_\oplus}{g} \, . \tag{10.72}$$

Con una prima approssimazione[37] verrebbe

$$\delta = \frac{\omega^2 R_\oplus}{g} = 3.43 \times 10^{-3} \, ,$$

che è un risultato smagliante[38]! Ma, in realtà, questo è un risultato allo stesso tempo "casuale", dovuto cioé al fatto che la Terra non è omogenea, ma molto più densa nel nucleo.
Newton, coerente con l'ipotesi dell'omogeneità, non poté "accontentarsi" e calcolò (con un procedimento di grande difficoltà per allora, e un po' complesso perfino oggi[39])

$$\frac{g_{polo}}{g_{eq}} = 1 + \frac{\delta}{5} \, ,$$

il che lo portò al risultato "sbagliato" (10.67).

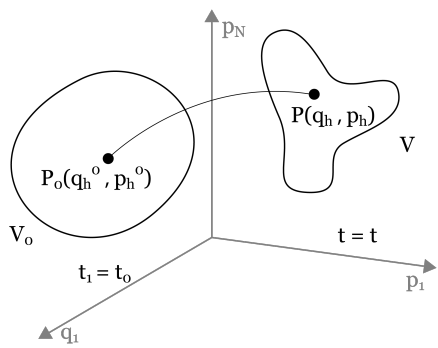
Insomma, un bellissimo esempio di *gedanken experiment* e un procedimento di calcolo veramente *newtoniano*.

[36] δ è piccolo e $\omega^2 \sim 10^-10$.
[37] $\frac{g_{polo}}{g_{eq}} \sim 1$.
[38] Vedi 10.68.
[39] Per questo qui omesso.

Appendice A

A.1 Invarianza del volume nello spazio delle fasi

Sia V_0 un "volume" nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^{2N}$.



Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{cases}, \tag{A.1}$$

le equazioni

$$\begin{cases} q_h = q_h(t, q_h^0, p_h^0) \\ p_h = p_h(t, q_h^0, p_h^0) \end{cases}$$

siano la soluzione del sistema A.1 per le condizioni iniziali $(q_h^0, p_h^0) \in V_0$. Esse rappresentano gli stati all'istante t e, nel loro complesso, costituiscono una trasformazione tra V_0 (insieme degli stati *iniziali*) e V (insieme degli stati *attuali*).

Si potrebbe dimostrare il seguente teorema di Liouville:

Teorema A.1 (Invarianza del volume)

$$\iint_{V_0} \dots \int dq_1^0\, dp_1^0 \dots dq_n^0\, dp_N^0 = \iint_V \dots \int dq_1\, dq_1 \dots dq_n dp_n\,.$$

A.2 Teorema del ritorno (eterno) di Poincaré

Dato un sistema, in particolare meccanico, la cui evoluzione sia fornita dalle equazioni canoniche A.1, vale il seguente *lemma*:

1. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

2. al sistema è consentita solo una regione limitata Γ dello spazio delle fasi $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$

3. $E(0) = \{q_h(0), p_h(0)\}$ è un arbitrario sottoinsieme misurabile di Γ (insieme degli stati iniziali) e $E(\tau)$ il corrispondente insieme degli stati finali (in relazione al sistema **??**)

$\Rightarrow$ esiste $T > \tau$ tale che valga

$$E(T) \cap E(0) \neq \emptyset \tag{A.2}$$

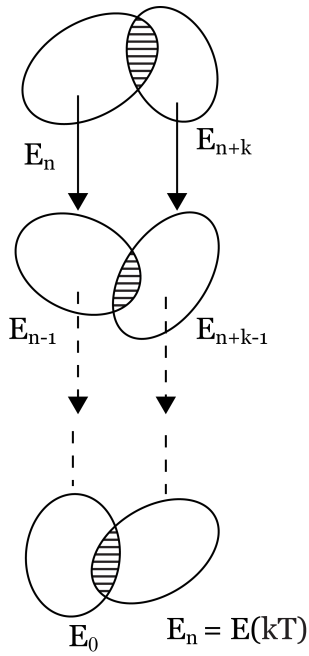
ed ha misura non nulla[1].
Si formi la successione

$$E_0 = E(0)\,, \qquad E_1 = E(\tau)\,, \qquad E_2 = E(2\tau)\,, \qquad \dots\,, \qquad E_i = E_i(i\tau)$$

(con $i = 1, 2, ..., N$): poiché il sistema **??** non dipende dal tempo, per raggiungere E_i si applica i volte la stessa trasformazione che porta da E_0 a E_1. Inoltre, per il *teorema di Liouville* (invarianza del volume),

$$\text{mis } E_0 = \text{mis } E_i \qquad \forall i$$

[1] Questa non è una dimostrazione rigorosa; si veda, per esempio, *F. Cardin*, "Appunti di Meccanica".



e quindi esistono due numeri naturali n e $(n+k)$ tali che l'insieme

$$E_n \cap E_{n+k} \neq \emptyset \tag{A.3}$$

sia di misura non nulla.
Così non fosse, infatti, tutti gli elementi della successione $\{E_i\}$ dovrebbero essere dotati di intersezione di misura — al più — nulla; per m sufficientemente grande si ha invece

$$\text{mis } U_1^m E_i = m \text{ mis } E_0 > \text{mis } \Gamma \,,$$

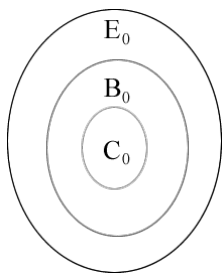
dovrebbero quindi esserci E_i che "escono" da Γ — contrariamente all'ipotesi A.2.
Perciò se $n = 0$, il teorema è provato per $T = k\tau$, se invece $n > 0$ si consideri il grafico seguente, in cui la prima immagine in alto rappresenta quanto espresso dalla A.3.

Invertendo la trasformazione n volte — o, che è lo stesso, assumendo E_n e E_{n+k} come "stati iniziali" — dopo il tempo τ gli stati finali forniti dalla soluzione di A.1 sono E_{n-1} e E_{n+k-1}. Procedendo in questo modo per n volte si otterrà la A.2 non appena si assuma $T = k\tau$, risultato che dimostra la validità del *lemma*.

Teorema A.2 (Teorema del ritorno) *Le traiettorie che hanno condizioni iniziali $E_0 \subset \Gamma$ "ritorneranno" — in un tempo sufficientemente lungo — in E_0, fatta eccezione, al più, per un insieme di misura nulla.*

Supponiamo infatti che esista $B_0 \subset E_0$ di misura *non nulla* tale che in esso non valga quanto appena asserito. Sia allora $C_0 \subset B_0$, anch'esso di misura non nulla: applicando a C_0 il lemma, si conclude che in C_0 ci sono traiettorie che ritornano dopo un certo tempo. B_0 è quindi, al più, di misura nulla.

Ciò significa che le traiettorie con stati iniziali in E_0 ritornano "quasi



tutte" in E_0 dopo un tempo sufficientemente lungo e quindi, in un tempo *infinito*, ciò accadrà infinite volte.

Si osservi che le "traiettorie" ritornano — quasi tutte — a stati vicini quanto si vuole allo stato iniziale. Infatti, ciascuna delle traiettorie rappresenta l'evoluzione dell'intero sistema considerato e, assunto C_0 un intorno sferico di raggio $\epsilon > 0$ (arbitrario), le traiettorie che ivi ritornano hanno stati che differiscono da quello iniziale per meno di ϵ. In sostanza, pensando ad un sistema meccanico di n particelle ($N = 6n$) libere, dopo un tempo sufficiente T si avrà

$$|q_h(T) - q_h^0| < \epsilon\,, \qquad |p_h(T) - p_h^0| < \epsilon\,,$$

dove q_h sono in questo caso le coordinate cartesiane e p_h sono le componenti coniugate della quantità di moto.

Le equazioni di Hamilton sono applicabili a sistemi meccanici classici soggetti a leggi reversibili. Il teorema di Poincaré dimostra che da leggi dinamiche reversibili non è deducibile l'irreversibilità termodinamica, come affermava Boltzmann; la dimostrazione di Boltzmann del famoso "teorema H" contiene assunzioni di tipo statistico.

Il fatto che per un sistema il "tempo di Poincaré"[2] — cioè il tempo del "ritorno" — ecceda l'età dell'Universo (secondo la teoria del Big Bang) non toglie che il secondo principio della termodinamica non sia deducibile nel quadro dinamico classico.
Cionondimeno, il contributo di Boltzmann fu fondamentale e aprì non solo alle ricerche di Gibbs, Einstein e di altri nel campo statistico ma, indirettamente, perfino[3] agli stessi esperimenti sul corpo nero che portarono alle soglie della meccanica quantistica[4].

[2]Anche di "poche" particelle, enormemente meno di quelle di una mole di gas ideale nella "scatola di Boltzmann".
Si badi che quanto qui detto non dà nessuna informazione sul "tempo".

[3]Secondo quanto afferma Planck.

[4]Per questo si legga *I. Prigogine*, "Dall'essere al divenire", Cap. II e Cap. IV — darà anche un'idea di alcuni sviluppi della dinamica *classica* (dei sistemi) solo brevemente accennati, per mancanza di tempo, durante il corso.

Appendice B

Equazioni di Whittaker e Jacobi

B.1 Impostazione

Per un sistema conservativo (generalizzato) il "moto" è definito dalle equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{q}_h &= \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h &= -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{aligned} \tag{B.1}$$

essendo

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0\,. \tag{B.2}$$

Quindi vale l'integrale generalizzato dell'energia

$$H(q_h, p_h) = \text{costante}\,.$$

Si è detto che una variabile "spaziale" q_α è ciclica se

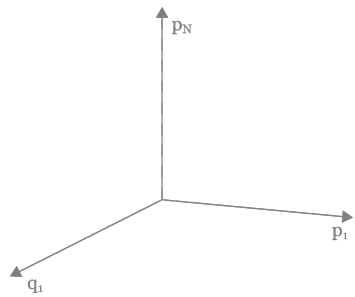
$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0\,,$$

che corrisponde al momento coniugato $p_\alpha = \text{cost}$.
Potremo vedere quindi la B.2 come espressione di t intesa come variabile *ciclica*, mentre H rappresenta il momento coniugato del tempo.

Considereremo le cose nello spazio ordinario delle fasi — cioé non ampliato — ed in esso considereremo stati (q_h, p_h) e moti del sistema tali che, per essi, H abbia un valore determinato

$$H(q_h, p_h) = h_0 \ : \tag{B.3}$$

tali moti si diranno "isoenergetici".



Sia (q_h^0, p_h^0) un punto dello spazio delle fasi soddisfancente a B.3: con quelle condizioni iniziali il moto — ovvero la soluzione del sistema B.1 — sarà uno dei moti isoenergetici che considereremo. In questo caso l'invariante di Poincare-Cartan sarà

$$I = \oint \sum_1^N p_h \delta q_h - H\delta t = \oint \sum_1^N p_h \delta q_h - h_0 \oint \delta t$$

cioé

$$I = \oint \sum_1^N p_h \delta q_h \, . \tag{B.4}$$

Se risolviamo la B.3 rispetto a p_1 si ottiene

$$p_1 = -k(q_2, ..., q_N, p_2, ..., p_N, h_0) \tag{B.5}$$

pertanto la B.4 si può riscrivere come

$$I = \oint \sum_2^N p_j \delta q_j - k\delta q_1 \, , \tag{B.6}$$

che si presenta nell'ordinaria forma dell'integrale di Poincaré-Cartan dove q_j e p_j sono le coordinate e i momenti coniugati, q_1 assume il ruolo del

tempo e k quello dell'Hamiltoniano. Il moto del sistema soddisfa quindi al seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial k}{\partial p_j} \\ \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial k}{\partial q_j} \end{cases} . \tag{B.7}$$

Integrando si ottiene allora

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(q_1, c_1, ..., c_{2N-2}, h_0) \\ p_j &= p_j(q_1, c_1, ..., c_{2N-2}, h_0) \, , \end{aligned} \tag{B.8}$$

con $j = 2, ..., N$.
Per ottenerele le relazioni del sistema di partenza basterà ricavare[1] da B.5

$$p_1 = p_1(q_1, c_1, ..., c_{2N-2}, h_0) \, ,$$

mentre la dipendenza delle q, p dal tempo t si otterrà per quadratura dalla prima delle equazioni

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \, .$$

Integrando

$$dt = \frac{dq_1}{\partial H / \partial p}$$

troveremo

$$t = \int \frac{dq_1}{\partial H / \partial p_1} + C_{2N-1} \, . \tag{B.9}$$

In conclusione le equazioni B.7 si dicono **equazioni di Whittaker** e si può osservare che la loro soluzione fornisce la *traiettoria* del moto nello spazio $\mathbb{R}^{2N}$ in funzione di q_1, mentre la B.9 fornisce la dipendenza dal tempo.

Osservazione

Si osservi che la "ciclicità" del tempo t espressa da B.2 conduce a risolvere $(2N-2)$ equazioni (quelle di Whittaker) esattamente come la presenza di una variabile ciclica q_α abbassa l'ordine del sistema Hamiltoniano di due unità.

[1] Si usi il sistema B.8.

B.2 Azione lagrangiana

Si è provata l'equivalenza delle equazioni di Lagrange e di quelle di Hamilton, ovvero

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \tag{B.10}$$

equivale a

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{cases}, \tag{B.11}$$

essendo[2]

$$H = \sum_1^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - L\,. \tag{B.12}$$

Finora abbiamo dedotto B.11 da B.10, tuttavia è anche possibile fare l'inverso. Per trovare le corrispondenti equazioni di Lagrange di B.11 basta dedurre, da B.12,

$$L = \sum_1^N p_h \dot{q}_h - H(q,p,t)\,. \tag{B.13}$$

Per ottenere $L(q,\dot{q},t)$ — in funzione delle variabili lagrangiane — occorre considerare

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}\,, \tag{B.14}$$

che sono invertibili rispetto alle p_h nella forma

$$p_h = \psi_h(q,\dot{q},t)\,. \tag{B.15}$$

Quest'ultime, sostituite in B.13, forniscono $L(q,\dot{q},t)$.

Si consideri un sistema conservativo in cui sia valida la B.3. E' stato possibile ricondurre la soluzione del sistema B.1 a quello di Whittaker

$$\begin{cases} \frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial k}{\partial p_j} \\ \frac{dp_i}{dq_1} = -\frac{\partial k}{\partial q_j} \end{cases} \tag{B.16}$$

e, ora, desideriamo procurarci le equazioni di Lagrange corrisponenti a tale sistema Hamiltoniano. La corrispondente funzione di Lagrange — in analogia con B.13 — è

$$P(q,q') = \sum_2^N p_j q'_j - k\,, \tag{B.17}$$

[2]Ricordandosi di esprimere H in variabili Hamiltoniane.

essendo

$$q'_j = \frac{dq_j}{dq_1}\,, \tag{B.18}$$

corrisponenti alle $\dot{q}$, dato che qui q_1 è al posto di t, e con la sostituzione delle p_j dedotta da

$$q'_j = \frac{\partial k}{\partial p_j}$$

in funzione di q, q'. Al lagrangiano B.17 corrispondono le equazioni

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial q'_j} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0\,, \qquad j = 2, ..., N \tag{B.19}$$

che sono equivalenti alle equazioni di Whittaker.

Si consideri per semplicità che il sistema sia conservativo e a *vincoli fissi*: ricordando la B.5

$$P = \sum_2^N p_j q'_j + p_j = \sum_2^N p_j \frac{dq_j}{dq_1} + p_1 \frac{dq_1}{dq_1}$$

e quindi

$$p = \sum_1^N p_h \frac{dq_h}{dq_1}\,.$$

Ne segue

$$P = \sum_1^N p_h \frac{\dot{q}_h}{dt}\frac{dt}{dq_1} = \frac{1}{\dot{q}_1}\sum_1^N p_h \dot{q}_h\,. \tag{B.20}$$

Poiché[3]

$$\sum_1^N p_h \dot{q}_h = H + L\,,$$

e considerando che nel caso in esame $H = T - U$ e $L = T + U$, segue

$$P = \frac{1}{\dot{q}_1} 2T\,. \tag{B.21}$$

Nel caso di vincoli fissi si ha $T = \frac{1}{2}\sum_1^N a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k$, da cui si deduce

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^N a_{hk}\frac{dq_h}{dt}\frac{dq_k}{dt} = \frac{1}{2}\sum_1^N a_{hk}\frac{dq_h}{dq_1}\frac{dq_k}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2,$$

[3]Si veda B.12.

ovvero

$$T = \dot{q}_1^2 \left[\frac{1}{2} \sum_1^N a_{hk} q'_h q'_k \right] = \dot{q}_1^2 G(qq') \,. \tag{B.22}$$

Da questa segue

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{T}{G}} \,, \tag{B.23}$$

pertanto

$$p = \frac{2T}{\dot{q}_1} = 2T\sqrt{\frac{G}{T}} = 2\sqrt{TG} \,.$$

Dato che $T = H + U = h_0 + U$, si ha in definitiva

$$p = 2\sqrt{(h_0 + U)G} \,.$$

Con tale forma le equazioni B.19 si dicono **equazioni di Jacobi**. Anch'esse, come quelle di Whittaker, forniscono la traiettoria del moto ma, in questo caso, nello *spazio delle configurazioni* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}(\mathrm{q}_1, ..., \mathrm{q}_{\mathrm{N}})$.
Se si vuole la dipendenza dal tempo[4] basta

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{h_0 + U}{G}} \tag{B.24}$$

che, mediante quadratura, fornisce q_1 in funzione di t, e viceversa.

Sempre con riferimento alle equazioni B.19 si noti che si può applicare il principio di Hamilton. La traiettoria rettilinea tra assegnati punti di $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ — $P_0(q_1^0, q_j^0)$ e $P_1(q_1^1, q_j^1)$ — è caratterizzata dalla condizione variazionale

$$\delta W^* = \delta \int_{q_1^0}^{q_1^1} P \, dq_1 = 0 \,. \tag{B.25}$$

Nel caso in esame (conservativo e a vincoli fissi), il funzionale W^* si scrive[5]

$$W^* = \int_{q_1^0}^{q_1^1} \frac{2T}{\dot{q}_1} \, dt = \int_{q_1^0}^{q_1^1} 2T \frac{dt}{dq_1} \, dq_1 \,.$$

In definitiva

$$W^* = \int_{t_0}^{t_1} 2T \, dt \tag{B.26}$$

e si dice **azione lagrangiana**[6].

Vale allora il seguente teorema:

[4] Si ricordi B.23.
[5] Vedi B.21.
[6] L'"azione lagrangiana", nonostante il nome, è in realtà di Libniz.

Teorema B.1 (Principio della minima azione) *tra tutti i moti isoenergetici ($H = h_0$) di un sistema a vincoli fissi e conservativo, quello effettivo è quello per cui*

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T\, dt = 0\,, \tag{B.27}$$

ovvero quello che rende stazionaria l'azione lagrangiana.

Osservazione

Poiché per il teorema di Eulero ($T = T_2$)

$$\sum_1^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = 2T\,,$$

e poiché nel nostro caso

$$\dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\,,$$

l'azione lagrangiana si scrive anche

$$W^* = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^N p_h\, dq_h\,.$$

Da B.17 segue

$$W^* = \int_{t_0}^{t_1} (L + H)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt + h_0 \int_{t_0}^{t_1} dt = W + h_0(t_1 - t_0)$$

che fornisce la relazione tra l'azione lagrangiana e l'azione hamiltoniana. Nel caso di un sistema in cui $T = E = h_0$ si ha

$$\delta W^* = h_0 \delta(t_1 - t_0) = 0\,,$$

che rappresenta il principio di *minimo tempo* che Fermat (ben prima) applicò alla rifrazione della luce.

Caso di un sistema particellare

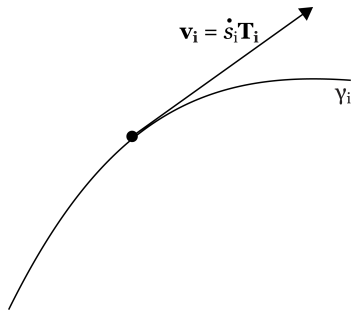
Se il sistema è particellare, cioè $\{P_i, m_i\}_1^n$, allora

$$W^* = 2\int_{t_0}^{t_1} T\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n m_i \mathbf{v_i} \times \mathbf{v_i}\, dt\,. \tag{B.28}$$

Se γ_i è la traiettoria dei punti p_i si ha subito

$$\mathbf{v_i} = \dot{s}_i \mathbf{T_i}\,,$$

con s_i coordinata curvilinea che rappresenta l'arco su γ_i.



Da B.28 segue

$$W^* = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n m_i v_i \mathbf{T} \times \dot{s}_i \mathbf{T}\, dt$$

e quindi

$$W^* = \sum_1^n \int_{s_i^0}^{s_i^1} m_i v_i\, ds_i\,. \tag{B.29}$$

Ecco allora che mediante il principio dell'azione stazionaria si ottengono le traiettorie. Ad esempio, per una sola particella

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} mv\, ds = 0$$

— che si esprime ricavando v da $\frac{1}{2}mv^2 = h_0 + U$ — ottenendo

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{2m(h_0 + U)}\, ds = 0\,.$$

La legge oraria è deducibile poi dalla

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{h_0 + U}{G}}\,.$$

Appendice C

Il problema delle geodetiche

Assegnata una superficie regolare S e

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)\,, \qquad \text{con } (u, v) \in D\,,$$

si consideri la curva regolare

$$u = u(t)\,, \qquad v = v(t) \qquad \text{con } t \in [t_0, t_1]$$

di D; la curva di $\mathbb{R}^3$

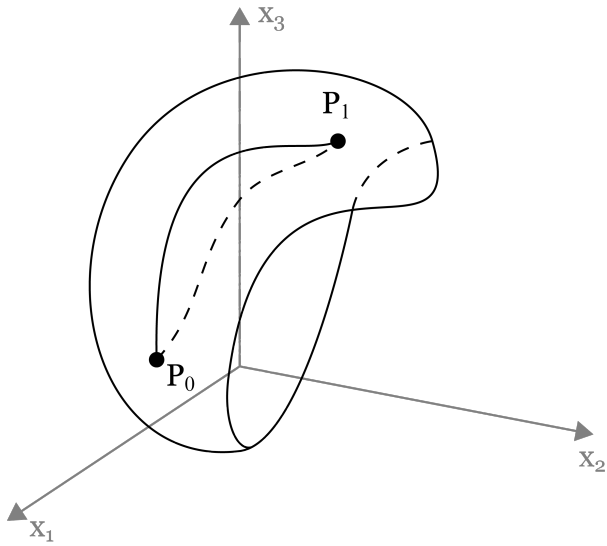
$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}\big[u(t), v(t)\big] \qquad \text{con } t \in [t_0, t_1]$$

appartiene alla superficie e siano $P_0 = \mathbf{r}\big[u(t_0), v(t_0)\big]$ e $P_1 = \mathbf{r}\big[u(t_1), v(t_1)\big]$ i suoi estremi.

Il problema è quello di trovare la geodetica tra i due punti, ovvero trovare la curva su S di estremi P_0 e P_1 che abbia **lunghezza minima**[1]. Ricordando quanto visto nei corsi di Analisi Matematica sulla metrica Riemanniana su S, si ha

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2\,.$$

[1] Più in generale: funzionale lunghezza stazionario.



Si tratta ora di considerare il funzionale (lunghezza)

$$I[u,v] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt$$

e, anzitutto, trovare la curva che lo renda stazionario, ovvero tale che

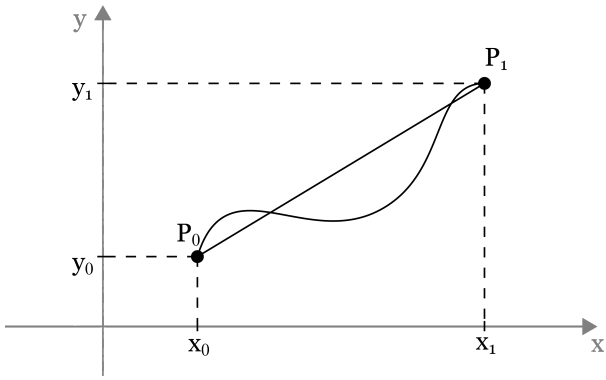
$$\delta I = 0\,.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{Eu' + Fv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} &&- \frac{\frac{\partial E}{\partial u}u' + 2\frac{\partial F}{\partial u}u'v' + \frac{\partial G}{\partial u}v'^2}{2\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} \\
&\frac{d}{dt}\frac{Fu' + Gv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} &&- \frac{\frac{\partial E}{\partial v}u' + 2\frac{\partial F}{\partial v}u'v' + \frac{\partial G}{\partial v}v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}}
\end{aligned}$$

in genere complicate.
Limitiamoci al caso — del tutto banale — della ricerca delle geodetiche in $\mathbb{R}^2$: sia

$$\begin{cases} x = x & \text{con } x_0 \le x \le x_1 \\ y = y(x) & \in C^1_{[x_0,x_1]} \end{cases}$$



una curva generica di estremi $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$.

La forma metrica è $ds^2 = dx^2 + dy^2$, quindi

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

è la lunghezza della curva.

Il problema variazionale che caratterizza le geodetiche è

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = 0 \,,$$

che equivale all'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1 + y'^2} - \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1 - y'^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

e quindi

$$y' = c_1 = \text{cost.}$$

Ne segue l'integrale generale

$$y = c_1 x + c_2 \,,$$

dove $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. Dunque

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

ovvero, come è ovvio, si tratta del segmento rettilineo P_0P_1.
In questo caso il funzionale ha un minimo.

Osservazione

Nel caso che la forma metrica sia indefinita,

$$ds^2 = dx^2 - dy^2$$

(come in Relatività: $y = ct$) e la condizione di stazionarietà

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 - y'^2} dx = 0$$

porta ancora ad un segmento di retta. In tal caso, però, il funzionale "lunghezza" ha un *massimo*[2]. Come si vedrà in Relatività, ciò spiega il *paradosso dei gemelli*.

[2]Per il funzionale $\int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')dx$, una condizione sufficiente per l'esistenza di un minimo (o massimo) — debole a rigore — è

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'^2} > 0 \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial y'^2} < 0\right)$$

sulla "curva" di stazionarietà.

.:: Seconda edizione, Settembre 2o11 ::.